

José Manuel Gamboa Mutuberría

Catedrático de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid.

Francisco José Baena Muñoz

Profesor de Enseñanza Secundaria.

Braulio de Diego Martín

Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria (excedente).
Profesor Titular de Escuela Universitaria. Universidad de Alcalá de Henares.

Agustín Llerena Achútegui

Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad de Alcalá de Henares.

José María Lorenzo Magán

Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad Complutense de Madrid.

María Belén Rodríguez Rodríguez

Catedrática de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.

Juan Manuel Hernández Rubio

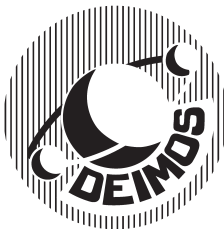
Profesor de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad Complutense de Madrid.

Bruno Salgueiro Fanego

Profesor de Enseñanza Secundaria.

PROBLEMAS DE OPOSICIONES MATEMÁTICAS

Tomo 10
(2019 y 2021)



*Preparación del ejercicio
práctico de las Oposiciones
al Cuerpo de Profesores de
Enseñanza Secundaria*

© Los autores
© Editorial Deimos
Glorieta del Puente de Segovia, 3
28011 Madrid
Tel.: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

Reservados todos los derechos. Ni todo ni parte de este libro pueden reproducirse o transmitirse, utilizando medios electrónicos o mecánicos, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin permiso por escrito del editor.

I.S.B.N: 978-84-86379-98-8 (Tomo 10)
Depósito legal: M-27428-2021

Prólogo

La pandemia ocasionada por COVID 19 ha afectado a nuestras vidas, a la actividad económica en todos los sectores y, en particular, a la actividad académica. En las enseñanzas Primaria y Secundaria la falta de recursos tecnológicos ha dificultado mucho la transmisión de conocimientos, y esta no ha sido la única consecuencia negativa de esta epidemia; todos los expertos señalan que ha dejado muchas secuelas de carácter psicológico. Aunque los estudiantes universitarios y aquéllos que se preparan en academias para superar las oposiciones que dan acceso al ejercicio de la función docente en el sector público se han adaptado mejor a la enseñanza y aprendizaje en remoto, a nadie se le escapa que el esfuerzo realizado por docentes y discentes ha sido formidable.

Una primera consecuencia de lo anterior fue la incertidumbre con que vivieron los opositores no saber si se celebrarían Pruebas de Acceso a la Función Pública en la Enseñanza Secundaria a lo largo del año 2020. Finalmente éstas no se celebraron, por lo que el volumen que el lector tiene entre sus manos recoge las soluciones a los problemas propuestos en 2019 en la Comunidad de Baleares, la Comunidad Valenciana y la Comunidad de Galicia y a los problemas propuestos en 2021 en todas las comunidades autónomas. Se trata del volumen 10 de la colección *Problemas de Oposiciones de Matemáticas* que la Editorial Deimos publica desde hace casi de 50 años.

Como viene siendo norma para nosotros, hemos incorporado tantas figuras como hemos juzgado necesarias para la comprensión de las soluciones. Además, siempre que hemos encontrado soluciones esencialmente distintas de un mismo problema las hemos redactado. En ocasiones hemos considerado que no pocos

lectores agradecerían explicaciones de los ingredientes que empleamos en la solución de un problema y por eso los hemos incluido bien al final o bien al principio de la solución.

Es muy llamativo que una proporción grande de los problemas propuestos en esta convocatoria ya lo habían sido en convocatorias anteriores, manteniendo la tendencia observada desde hace años. Como ya hicimos en el volumen 9 de esta colección hemos optado por incluir soluciones de cada problema, sin remitir al lector a otro volumen anterior en el que hubiera sido resuelto. En estas situaciones señalamos, a continuación del enunciado, en qué número de qué volumen se encuentra, total o parcialmente, una solución a un enunciado igual o semejante al que resolvemos. Creemos que esto hace la obra más útil, aunque lo que de verdad es útil al preparar el ejercicio práctico de las actuales oposiciones es intentar resolver los problemas por uno mismo.

En cualquier caso, el uso más provechoso de este volumen (y los anteriores) consiste en adoptar una actitud intermedia, es decir, merece la pena intentar resolver por uno mismo cada problema, pero conviene recurrir a las soluciones que el libro proporciona cuando hayamos dedicado un tiempo prudencial a su resolución. En ocasiones el lector se percatará de que los autores hemos cometido algún error, y le agradeceríamos que se pusiese en contacto con nosotros para advertirnos.

En una época en la que el mercantilismo lo invade todo y se juzga como interesante sólo aquello que genera beneficios económicos, es de agradecer el esfuerzo realizado por la Editorial Deimos publicando libros de estas características, destinados a un mercado muy reducido y, en consecuencia, sin apenas margen de beneficios. Para terminar queremos agradecer a nuestras familias habernos permitido privarles de nuestra compañía durante las horas de preparación del libro.

Madrid, Septiembre 2021

LOS AUTORES

Índice de problemas por Comunidades Autónomas

Año 2019

Baleares	Página 1
	Problemas 19.1, 19.2, 19.3, 19.4, 19.5, 19.6, 19.7, 19.8, 19.9, 19.10, 19.11, 19.12, 19.13, 19.14, 19.15, 19.16, 19.17, 19.18
Comunidad Valenciana	Página 37
	Problemas 19.19, 19.20, 19.21, 19.22, 19.23
Galicia	Página 53
	Problemas 19.24, 19.25, 19.26, 19.27, 19.28, 19.29, 19.30, 19.31, 19.32, 19.33

Año 2021

Andalucía	Página 79
	Problemas 21.34, 21.35, 21.36, 21.37, 21.38, 21.39

Aragón.....	Página 99
	Problemas 21.40, 21.41, 21.42, 21.43, 21.44, 21.45, 21.46, 21.47, 21.48, 21.49
Asturias.....	Página 127
	Problemas 21.50, 21.51, 21.52, 21.53
Baleares	Página 147
	Problemas 21.54, 21.55, 21.56, 21.57, 21.58, 21.59, 21.60, 21.61, 21.62, 21.63, 21.64, 21.65, 21.66, 21.67, 21.68, 21.69, 21.70, 21.71, 21.72, 21.73, 21.74, 21.75, 21.76, 21.77, 21.78, 21.79, 21.80, 21.81
Canarias	Página 223
	Problemas 21.82, 21.83, 21.84, 21.85, 21.86, 21.87
Cantabria	Página 247
	Problemas 21.88, 21.89, 21.90, 21.91, 21.92, 21.93, 21.94, 21.95
Castilla y León.....	Página 261
	Problemas 21.96, 21.97, 21.98, 21.99, 21.100, 21.101, 21.102, 21.103
Castilla-La Mancha	Página 285
	Problemas 21.104, 21.105, 21.106, 21.107
Cataluña.....	Página 303
	Problemas 21.108, 21.109, 21.110, 21.111, 21.112, 21.113

Ceuta	Página 343
	Problemas 21.114, 21.115, 21.116, 21.117, 21.118, 21.119
Comunidad Valenciana	Página 357
	Problemas 21.120, 21.121, 21.122, 21.123
Euzkadi	Página 375
	Problemas 21.124, 21.125, 21.126, 21.127
Extremadura	Página 387
	Problemas 21.128, 21.129, 21.130, 21.131, 21.132, 21.133, 21.134, 21.135, 21.136, 21.137, 21.138, 21.139
Galicia	Página 411
	Problemas 21.140, 21.141, 21.142, 21.143, 21.144, 21.145, 21.146, 21.147, 21.148, 21.149
Madrid	Página 433
	Problemas 21.150, 21.151, 21.152, 21.153
Melilla	Página 447
	Problemas 21.154, 21.155, 21.156, 21.157, 21.158, 21.159
Murcia	Página 463
	Problemas 21.160, 21.161, 21.162, 21.163, 21.164
Navarra	Página 473
	Problemas 21.165, 21.166, 21.167, 21.168, 21.169, 21.170, 21.171, 21.172, 21.173, 21.174, 21.175, 21.176, 21.177, 21.178, 21.179, 21.180

Índice temático de problemas

Álgebra

Anillos conmutativos	21.52, 21.116, 21.133
Aplicaciones lineales	19.10, 19.19, 19.27, 21.61, 21.68, 21.69, 21.88, 21.8992, 21.102, 21.140, 21.174
Aritmética	19.2, 19.9, 19.14, 19.25, 21.39, 21.40, 21.45, 21.55, 21.56, 21.63, 21.64, 21.96, 21.104, 21.115, 21.126, 21.133, 21.142, 21.152, 21.153, 21.154, 21.160, 21.169
Congruencias	19.2, 19.14, 19.25, 21.115, 21.132, 21.152, 21.155
Determinantes	21.48, 21.79, 21.135, 21.153, 21.161
Diagonalización	19.10, 21.68, 21.102, 21.120, 21.1325
Ecuaciones algebraicas	21.78, 21.105, 21.111, 21.138, 21.154, 21.157

Ecuaciones diofánticas	21.40, 21.100, 21.152
Espacios vectoriales	19.10, 19.15, 19.19, 19.27, 21.37, 21.41, 21.46, 21.52, 21.61, 21.68, 21.69, 21.74, 21.88, 21.92, 21.99, 21.102, 21.124, 21.140, 21.145, 21.170, 21.174, 21.178
Factorización	19.9, 19.30, 21.40, 21.45, 21.63, 21.64, 21.104, 21.154
Matrices	19.10, 19.15, 19.19, 21.37, 21.41, 21.46, 21.52, 21.61, 21.68, 21.69, 21.74, 21.88, 21.8992, 21.102, 21.103, 21.124, 21.135, 21.140, 21.165, 21.170
Polinomios	19.30, 21.45, 21.105, 21.138, 21.140, 21.155, 21.157, 21.174
Potencias de matrices	21.68, 21.120, 21.165
Programación Lineal	21.82, 21.93
Sistemas de ecuaciones lineales	21.1058, 21.145

Análisis real

Funciones reales de variable real	21.45, 21.51, 21.85, 21.109, 21.118, 21.173
-----------------------------------------	------------------------------------------------

Límites de funciones. Continuidad.....	19.28, 21.42, 21.51, 21.60, 21.76, 21.89, 21.109, 21.111, 21.117, 21.118, 21.121, 21.128, 21.171
Límites de sucesiones	19.4, 19.6, 19.17, 21.35, 21.106, 21.117, 21.118, 21.136, 21.148
Progresiones aritméticas y geométricas ..	19.4, 21.56, 21.76, 21.126
Series numéricas	19.17, 21.38, 21.53, 21.73, 21.150
Series de potencias.....	21.73
Sucesiones recurrentes	19.6, 21.99, 21.106, 21.117, 21.120

Cálculo diferencial

Asíntotas.....	19.11, 21.83, 21.85, 21.101, 21.109, 21.126
Derivadas	19.11, 19.22, 19.28, 19.31, 21.35, 21.42, 21.49, 21.51, 21.60, 21.72, 21.76, 21.83, 21.89, 21.101, 21.109, 21.117, 21.126, 21.146, 21.166, 21.171, 21.173, 21.177, 21.179
Máximos y mínimos.....	19.11, 19.22, 19.31, 21.35, 21.42, 21.49, 21.51, 21.72, 21.83, 21.101, 21.109, 21.126, 21.128, 21.146, 21.166

Recta tangente..... 21.59, 21.76, 21.137, 21.144, 21.146,
21.166, 21.179

Teorema de los incrementos finitos..... 21.89

Representación de curvas planas 19.11, 21.51, 21.80, 21.83, 21.85,
21.101, 21.109, 21.126, 21.151,
21.167, 21.179

Cálculo integral

Áreas..... 19.11, 19.28, 21.49, 21.51, 21.65,
21.75, 21.80, 21.83, 21.85, 21.112,
21.136, 21.146, 21.151, 21.158,
21.167, 21.169

Integral definida..... 19.3, 19.7, 19.11, 19.13, 19.17, 19.28,
19.29, 21.38, 21.49, 21.51, 21.54,
21.59, 21.60, 21.65, 21.75, 21.80,
21.97, 21.101, 21.106, 21.112, 21.126,
21.131, 21.134, 21.136, 21.147,
21.151, 21.158, 21.162, 21.167,
21.169, 21.173

Integrales eulerianas..... 21.54, 21.70, 21.81, 21.106, 21.167

Longitudes de curvas..... 19.3, 21.76

Primitivas 19.3, 19.7, 19.11, 19.17, 21.38, 21.49,
21.59, 21.60, 21.79, 21.85, 21.112,
21.131, 21.151

Regla de Leibniz	21.173
Teorema de Fubini	21.97, 21.112, 21.141
Teorema fundamental del Cálculo	19.28, 21.49, 21.60, 21.112, 21.126, 21.162, 21.173
Volúmenes	19.22, 21.38, 21.59, 21.97, 21.134, 21.141

Combinatoria

Grafos	19.23
Combinaciones sin repetición	19.20, 19.24, 21.34, 21.156, 21.160
Combinaciones con repetición	21.39
Permutaciones con repetición	21.47

Geometría

Circunferencia	21.67, 21.71, 21.76, 21.86, 21.122, 21.129, 21.137, 21.146, 21.149, 21.151, 21.172, 21.175
Cónicas	21.67, 21.129, 21.137, 21.144, 21.149, 21.172

Envolventes	19.33, 21.172
Geometría lineal afín	19.5, 19.21, 19.33, 21.48, 21.50, 21.57, 21.113, 21.122
Geometría métrica	19.1, 19.5, 19.12, 19.31, 19.32, 21.36, 21.43, 21.48, 21.50, 21.57, 21.67, 21.68, 21.71, 21.86, 21.90, 21.94, 21.103, 21.113, 21.114, 21.122, 21.125, 21.129, 21.137, 21.144, 21.151, 21.159, 21.162, 21.172, 21.175
Lugares geométricos.....	19.33, 21.129, 21.137, 21.144, 21.149, 21.151
Movimientos	19.32, 21.43, 21.68, 21.94, 21.103, 21.159
Semejanza de triángulos	19.1, 19.32, 21.43, 21.50, 21.67, 21.86, 21.113
Teorema de Thales.....	19.1, 21.86
Trigonometría	19.4, 19.8, 19.12, 19.26, 19.32, 21.36, 21.43, 21.50, 21.57, 21.65, 21.86, 21.114, 21.126, 21.149, 21.159

Probabilidad

Distribución binomial.....	21.34, 21.39 21.66, 21.87, 21.95, 21.176
----------------------------	---------------------------------------------

Distribución normal	19.18, 21.87
Distribución de Poisson	19.24
Esperanza	19.13, 19.18, 19.24, 19.29, 21.39, 21.62, 21.70, 21.81, 21.91, 21.95, 21.168, 21.180
Funciones de probabilidad/densidad	19.7, 19.13, 19.16, 19.24, 19.29, 21.39, 21.44, 21.53, 21.62, 21.66, 21.70, 21.81, 21.87, 21.91, 21.143, 21.168, 21.180
Leyes de los grandes números	21.84
Probabilidad condicionada	19.24, 21.34, 21.44, 21.47, 21.62, 21.66, 21.70, 21.77, 21.84, 21.87, 21.123, 21.156, 21.162, 21.119, 21.168, 21.176, 21.180
Probabilidades geométricas	19.16, 21.58, 21.107, 21.130, 21.1369, 21.143, 21.150
Regla de Laplace	19.20, 21.44, 21.47, 21.53, 21.58, 21.77, 21.84, 21.100, 21.107, 21.110, 21.119, 21.148, 21.150, 21.156
Sucesos independientes	19.13, 19.18, 21.53, 21.70, 21.77, 21.119, 21.176
Teorema de la probabilidad total	19.24, 21.44, 21.47, 21.66, 21.77, 21.87, 21.110, 21.119, 21.123, 21.164, 21.180

Teorema de Bayes	19.24, 21.44, 21.87, 21.110, 21.123, 21.164
Test de hipótesis	19.18
Variables aleatorias	19.7, 19.13, 19.16, 19.18, 19.20, 21.34, 21.44, 21.53, 21.58, 21.62, 21.66, 21.87, 21.95, 21.180
Varianza	19.13, 19.18, 21.70, 21.952, 21.180

Variable compleja

Fórmula de De Moivre	19.4, 19.8, 19.26, 21.36
Funciones de variable compleja	19.26
Números complejos y puntos del plano	21.34, 21.78, 21.98, 21.105, 21.157, 21.159
Raíces n -ésimas de la unidad	19.26

PROBLEMAS SELECCIONADOS

Problema propuesto en la Comunidad de Baleares en 2021

Número 21.57 Sea E el punto medio del lado \overline{AC} de un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ y sea S el área de este triángulo. Demuestre que si $\alpha = \angle AEB$, entonces

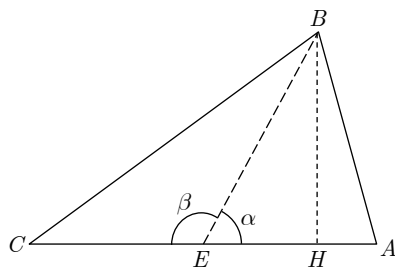
$$\cot \alpha = \frac{BC^2 - AB^2}{4S}$$

Este problema es también el 89.10 del volumen 3 y el 16.19 del volumen 8 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos, donde figura resuelto.

Una solución. Empleamos las notaciones de la figura y, en particular,

$$\angle BEC = \beta = \pi - \alpha$$

Aplicamos el Teorema del coseno en los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle CEB$. Se tiene



$$BA^2 = AE^2 + EB^2 - 2AE \cdot EB \cos \alpha \quad \text{y} \quad BC^2 = EC^2 + EB^2 - 2EC \cdot EB \cos \beta$$

Además $\cos \beta = -\cos \alpha$ y $AE = EC$ porque E es el punto medio del segmento \overline{AC} . Por eso, restando las igualdades anteriores,

$$\begin{aligned} BC^2 - BA^2 &= 2AE \cdot EB \cos \alpha - 2AE \cdot EB \cos \beta = 2AE \cdot EB \cdot (\cos \alpha - \cos \beta) \\ &= 2AE \cdot EB \cdot (\cos \alpha + \cos \alpha) = 4AE \cdot EB \cos \alpha \end{aligned}$$

Por otro lado, el área S del triángulo $\triangle ABC$ vale

$$S = \frac{AC \cdot BH}{2} = AE \cdot BH = AE \cdot EB \sin \alpha$$

Dividiendo resulta

$$\frac{BC^2 - BA^2}{4S} = \frac{4AE \cdot EB \cos \alpha}{4AE \cdot EB \sin \alpha} = \cot \alpha = \cot(\angle AEB)$$

Otra solución. Supondremos que es $BC \geq AB$ (en caso contrario basta intercambiar los papeles de A y C en lo que sigue). Por un lado es

$$\cot \alpha = \frac{EH}{BH}$$

Por otro lado, al aplicar el Teorema de Pitágoras en los triángulos $\triangle BHC$ y $\triangle AHB$ se deducen:

$$CH^2 + BH^2 = BC^2, \quad BH^2 + AH^2 = AB^2$$

y, al restar ambas igualdades, obtenemos

$$BC^2 - AB^2 = CH^2 - AH^2 = (CH + AH)(CH - AH) \quad (7.3)$$

Distinguimos ahora según que el ángulo $\angle BAC$ sea agudo, recto u obtuso:

i) Si $\angle BAC$ es un ángulo agudo, entonces $CH + AH = AC$ y

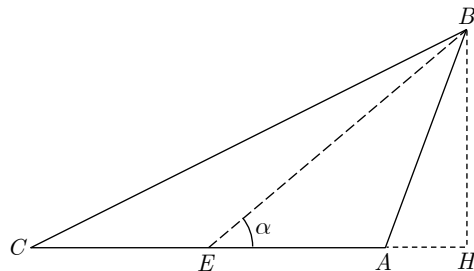
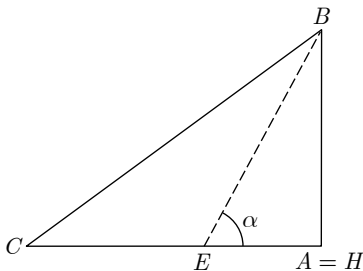
$$CH - AH = CE + EH - AH = (EA - AH) + EH = EH + EH = 2 \cdot EH$$

ii) Si $\angle BAC$ es un ángulo recto, entonces $H = A$ y por tanto $CH + AH = AC$ y

$$CH - AH = AC = 2 \cdot EA = 2 \cdot EH$$

iii) Si $\angle BAC$ es un ángulo obtuso, entonces $CH - AH = AC$ y

$$CH + AH = CE + EH + AH = EA + EH + EH - EA = 2 \cdot EH$$



Por tanto y según (7.3), en cualquier caso es

$$BC^2 - AB^2 = CH^2 - AH^2 = 2 \cdot AC \cdot EH$$

Entonces, multiplicando y dividiendo la igualdad anterior por $2 \cdot BH$, se tiene que:

$$BC^2 - AB^2 = 2 \cdot AC \cdot EH = \left(4 \cdot \frac{EH}{BH}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH\right) = 4 \cdot \cot \alpha \cdot S$$

como había que demostrar.

Una solución más. Elegimos un sistema de referencia cartesiano rectangular del plano centrado en el punto E y respecto del que las coordenadas de los vértices son $A = (1, 0)$, $C = (-1, 0)$ y $B = (a, b)$, con $b > 0$.

En tal caso, al aplicar el Teorema de Pitágoras en los triángulos $\triangle BHC$ y $\triangle AHB$ se deduce que

$$BC^2 = (a + 1)^2 + b^2$$

$$AB^2 = (a - 1)^2 + b^2$$

Restando ahora ambas igualdades:

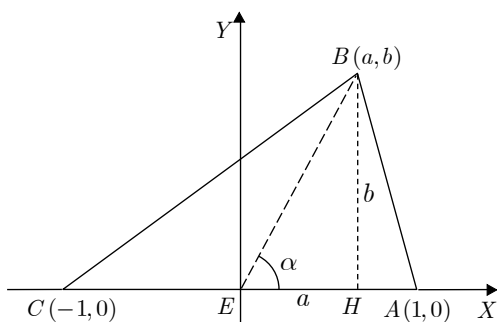
$$BC^2 - AB^2 = (a + 1)^2 - (a - 1)^2 = 4a$$

Dado que son

$$\cot \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b = b$$

se deduce finalmente:

$$4S \cdot \cot \alpha = 4b \cdot \frac{a}{b} = 4a = BC^2 - AB^2$$



Problema propuesto en la Comunidad de Castilla-La Mancha en 2021

Número 21.106 Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx.$$

- (1) Encuentre una fórmula para calcular A_n a partir de n
 (2) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

Este problema es muy similar a los que figuran resueltos en las páginas 264 y 306 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. Está relacionado con la Fórmula de Wallis cuya demostración puede consultarse en la página 37 del volumen 7 de dicha colección.

Una solución. (1) Supongamos que n es un número natural mayor o igual que 2. Si en la integral A_n hacemos $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, entonces resultan $du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \, dx$, $v = -\cos x$, se cumple, integrando por partes, que

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = -[\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n \end{aligned}$$

es decir, para cada $n \geq 2$,

$$A_n = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n$$

y, despejando A_n ,

$$A_n = \left(\frac{n-1}{n} \right) A_{n-2}$$

Dado que son

$$A_0 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad A_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = -[\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

si convenimos en que $0!! = 1$, al tirar del hilo recurrente se deduce que:

(i) Si $n \in \mathbb{N}$ es impar,

$$A_n = \frac{n-1}{n} \cdot A_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot A_{n-4} = \dots$$

$$\dots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot A_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ es par, es $A_0 = \frac{\pi}{2}$ y si $n \geq 2$,

$$A_n = \frac{n-1}{n} \cdot A_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot A_{n-4} = \dots$$

$$\dots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) Para cada $x \in [0, \pi/2]$, ocurre que

$$\text{sen}^{n+2} x \leq \text{sen}^{n+1} x \leq \text{sen}^n x$$

y, al integrar cada miembro entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ se tiene, por la propiedad de monotonía de la integral, que

$$A_{n+2} \leq A_{n+1} \leq A_n$$

y, dividiendo por A_n , resulta

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} \leq \frac{A_{n+1}}{A_n} \leq 1 \tag{11.5}$$

Cancelando $\frac{\pi}{2}$ en el caso n par, se tiene, tanto si n es par como si es impar, que

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} = \frac{n!! \cdot (n+1)!!}{(n-1)!! \cdot (n+2)!!} = \frac{n+1}{n+2}$$

y de la aplicación de la Regla del sandwich en (11.5) se deduce que la sucesión $\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$ es convergente y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1$$

y que, en consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Observación. Facilitamos aquí otra forma de obtener la relación recurrente

$$A_n = \left(\frac{n-1}{n} \right) \cdot A_{n-2}$$

Si denotamos D al operador derivada, se tiene, para cada $n \geq 2$,

$$D [\text{sen}^{n-1} x \cos x] = (n-1) \text{sen}^{n-2} x \cos^2 x - \text{sen}^n x$$

y al integrar la identidad anterior en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, se tiene que

$$[\text{sen}^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} = (n-1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2} x (1 - \text{sen}^2 x) dx - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x dx$$

$$\implies 0 = (n-1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x dx - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x dx$$

$$\implies 0 = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n - A_n \implies A_n = \left(\frac{n-1}{n} \right) \cdot A_{n-2}$$

Otra solución. (1) Si $n = 0$, entonces

$$A_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si es $n \geq 1$, recurriendo a la expresión trigonométrica de la integral euleriana beta (véase la observación tras las soluciones del problema 21.54), deducimos que $A_n = \frac{1}{2}B(p, q)$, donde $2p - 1 = n$ y $2q - 1 = 0$, es decir, $p = \frac{n+1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$, luego

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x dx = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Los valores de $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ y $\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$ dependen de la paridad de n , así que distinguimos:

(i) Si n es impar, puede escribirse $n = 2k - 1$ para cierto $k \geq 1$, luego $\frac{n+1}{2} = k$, $\frac{n+2}{2} = k + \frac{1}{2}$ y

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(k)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(k-1)!}{\left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{2^{k-1} \cdot (k-1)!}{(2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1} = \frac{(2k-2)(2k-4) \cdots 4 \cdot 2}{(2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1} = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \end{aligned}$$

(ii) Si n es par, entonces será $n = 2k$ para cierto $k \geq 1$, luego $\frac{n+1}{2} = k + \frac{1}{2}$ y $\frac{n+2}{2} = k + 1$ y

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + 1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{k!} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k - 1)(2k - 3) \cdots 3 \cdot 1}{2^k \cdot k!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k - 1)(2k - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2k(2k - 2) \cdots 4 \cdot 2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k - 1)!!}{(2k)!!} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n - 1)!!}{n!!} \end{aligned}$$

(2) Para demostrar que la sucesión $\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)$ es convergente hacia un límite ℓ , es suficiente (y necesario) probar que las dos subsucesiones

$$\left(\frac{A_{2n-1}}{A_{2n}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}}\right)$$

son convergentes hacia ℓ . Puestos a ello, en virtud de la expresión obtenida para A_n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{2n-1}}{A_{2n}}\right) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 2)!! \cdot (2n)!!}{(2n - 1)!! \cdot (2n - 1)!!}$$

Dado que, según la fórmula de Wallis, cuando $n \rightarrow \infty$, es

$$\frac{(2n)!!}{(2n - 1)!!} \sim \sqrt{n\pi}$$

deducimos, recurriendo al Principio de sustitución, que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{2n-1}}{A_{2n}}\right) &= \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n - 1} \cdot \frac{(2n - 2)!!}{(2n - 3)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n - 1)!!}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n - 1} \cdot \sqrt{(n - 1)\pi} \cdot \sqrt{n\pi}\right) = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - n}}{2n - 1} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} \right) &= \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!! \cdot (2n+1)!!}{(2n)!! \cdot (2n)!!} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left((2n+1) \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left((2n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} = 1$$

Problema propuesto en la Comunidad de Extremadura en 2021

OPCIÓN B

Número 21.132 *Diecisiete personas van a jugar a un casino y se reparten fichas de igual valor a partes iguales sobrando tres. Seis de los jugadores se encuentran cansados y deciden irse a dormir. El resto vuelve a repartir las fichas sobrando cuatro. Al fin, sólo seis deciden jugar y reparten de nuevo las fichas sobrando cinco esta vez. Calcula el número total de fichas sabiendo que está comprendido entre 1500 y 3000.*

Una solución. Sea x el número total de fichas. Al dividir x por 17 el resto es 3, al dividir x por 11 se obtiene como resto 4 y, por último, al dividir x por 6 el resto es 5, es decir,

$$x \equiv 3 \pmod{17}, \quad x \equiv 4 \pmod{11}, \quad x \equiv 5 \pmod{6}$$

Se trata por tanto de encontrar un número natural x comprendido entre 1500 y 3000 que sea solución del sistema de congruencias lineales anterior. Por ser los módulos 17, 11 y 6 coprimos dos a dos, según el Teorema chino de los restos, el sistema tiene solución única módulo $17 \cdot 11 \cdot 6 = 1122$.

Para encontrarla, si x es solución del sistema, lo es de la primera ecuación, luego será $x = 3 + 17r$, para algún $r \in \mathbb{Z}$. Al sustituir en la segunda congruencia, se tiene

$$\begin{aligned} 3 + 17r &\equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow 17r \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 6r \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6r \equiv 12 \pmod{11} \Rightarrow r \equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

por ser $\text{mcd}(6, 11) = 1$. Por tanto $r = 2 + 11s$, donde $s \in \mathbb{Z}$ y será $x = 3 + 17(2 + 11s) = 37 + 187s$. Como x cumple la última congruencia y $187 \equiv 1 \pmod{6}$:

$$37 + 187s \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow 187s \equiv -32 \pmod{6} \Rightarrow s \equiv 4 \pmod{6}$$

es decir, $s = 4 + 6t$, para algún $t \in \mathbb{Z}$, y por tanto, cualquier solución del sistema de congruencias lineales es

$$x = 37 + 187s = 37 + 187(4 + 6t) = 785 + 1122t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

Como el número x de fichas está comprendido entre 1500 y 3000, deberá cumplirse que $1500 \leq 785 + 1122t \leq 3000$, es decir, $715 \leq 1122t \leq 2215$, inecuación doble cuya única solución entera es $t = 1$. El número total de fichas es, en consecuencia,

$$x = 785 + 1122 \cdot 1 = 1907$$

Otra solución. La demostración del Teorema chino de los restos es constructiva, lo que proporciona un algoritmo para obtener, *sin pensar*, una solución del sistema de congruencias. Una vez obtenida una solución, para obtener otra que cumpla ciertas restricciones se procede como en la solución anterior.

Para obtener una solución comenzamos expresando 1 como combinación de 17 y $11 \cdot 6 = 66$. Dividimos sucesivamente:

$$66 = 4 \cdot 17 - 2, \quad 17 = 2 \cdot 9 - 1$$

lo proporciona la igualdad

$$1 = 9 \cdot 2 - 17 = 9(4 \cdot 17 - 66) - 17 = 35 \cdot 17 - 9 \cdot 66 = u_1 + v_1$$

donde $u_1 := 35 \cdot 17$ y $v_1 := -9 \cdot 66 = -594$. Repetimos el proceso con 11 y $4 \cdot 17 = 68$. Se tiene $68 = 6 \cdot 11 + 2$ y $11 = 6 \cdot 2 - 1$, así que

$$1 = 6 \cdot 2 - 11 = 6 \cdot (68 - 6 \cdot 11) - 11 = -37 \cdot 11 + 6 \cdot 68 = u_2 + v_2$$

donde $u_2 := -37 \cdot 11$ y $v_2 := 6 \cdot 68 = 408$. Por último, expresamos 1 como combinación de 6 y $11 \cdot 17 = 187$. En este caso basta observar que

$$1 = -6 \cdot 31 + 187 = u_3 + v_3, \quad \text{donde } u_3 := -6 \cdot 31 \quad \text{y} \quad v_3 := 187$$

Denotamos $x_1 := 3$, $x_2 := 4$ y $x_3 := 5$, y se desprende de la demostración del Teorema Chino de los restos que una solución de las congruencias dadas es

$$x := \sum_{i=1}^3 x_i v_i = -3 \cdot 594 + 4 \cdot 408 + 5 \cdot 187 = 785$$

PUBLICACIONES

● **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 1: 1969 a 1980.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.

CUARTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-94-0.

Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.

Obra dedicada a la resolución, con todo detalle, de los 509 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 598 pág., ofreciéndose dos métodos de resolución cuando se ha considerado oportuno.

● **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 2: 1981 a 1987.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.

TERCERA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-89-6.

Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.

Contiene, en 768 páginas, 773 problemas totalmente¹ resueltos que fueron propuestos en las citadas oposiciones, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

● **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 3: 1988 a 1995.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.

SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-34-6.

Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena y Mariano Llerena.

Contiene totalmente¹ resueltos 551 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 672 pág., convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

● **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 4: 1996 a 2005.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.

SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-86-5.

Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, M^a Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa y José M^a Lorenzo.

Contiene totalmente¹ resueltos 378 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 1004 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

¹ Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 5: 2006 a 2012.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.
TERCERA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-92-6
Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, M^a Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José M^a Lorenzo y Bruno Salgueiro.
Contiene totalmente¹ resueltos 194 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 718 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 6: 2014.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.
I.S.B.N. 978-84-86379-87-2
Autores: Braulio de Diego, Francisco Baena, Agustín Llerena, M^a Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José M^a Lorenzo y Bruno Salgueiro.
Contiene totalmente¹ resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 168 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 7: 2015.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.
I.S.B.N. 978-84-86379-91-9
Autores: Francisco Baena, José Manuel Gamboa, Braulio de Diego, Agustín Llerena, M^a Belén Rodríguez, José M^a Lorenzo y Bruno Salgueiro.
Contiene totalmente¹ resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 238 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 8: 2016.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.
I.S.B.N. 978-84-86379-93-3
Autores: Francisco Baena, José Manuel Gamboa, Braulio de Diego, Agustín Llerena, M^a Belén Rodríguez, José M^a Lorenzo y Bruno Salgueiro.
Contiene totalmente¹ resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 378 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 9: 2017 y 2018.**
Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
Matemáticas.
SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-96-4
Autores: José Manuel Gamboa, Francisco Baena, Braulio de Diego, Agustín Llerena, José M^a Lorenzo, M^a Belén Rodríguez, José F. Fernando y Bruno Salgueiro.
Contiene totalmente resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 400 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

¹ Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

● **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 10: 2019 y 2021.**

Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.

Matemáticas.

I.S.B.N. 978-84-86379-98-8

Autores: José Manuel Gamboa, Francisco Baena, Braulio de Diego, Agustín Llerena, José M^á Lorenzo, M^á Belén Rodríguez, Juan M. Hernández y Bruno Salgueiro.

Contiene totalmente resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 536 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

● **TEMAS DE OPOSICIONES A PROFESOR DE ENSEÑANZA SECUNDARIA.**

Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.

Matemáticas.

SEGUNDA EDICIÓN. Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-48-3. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-47-6. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-49-0.

Autores: Braulio de Diego, Francisco Padilla y Agustín Llerena.

Obra de 3 volúmenes en la que se desarrollan todos los temas del Temario de Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, especialidad de Matemáticas

● **PROGRAMACIONES Y UNIDADES DIDÁCTICAS.**

Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.

Matemáticas.

Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-74-2. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-75-9. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-76-6. Tomo 4, 978-84-86379-77-3.

Autores: Fernando García, Antonio J. López, Manuel López, José M^á Lorenzo, Jorge Quereda, Manuela Redondo y M^á Teresa Sánchez

Figuran desarrolladas las programaciones de las asignaturas de Matemáticas de 1^º y 2^º de E.S.O. en el Tomo 1; 3^º y 4^º (Opciones A y B) de E.S.O. en el Tomo 2; las Matemáticas I y II del Bachillerato de Ciencias y Tecnología en el Tomo 3; y las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II en el Tomo 4. Además, con cada programación se desarrollan al menos quince unidades didácticas.

● **PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL.**

Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.

CUARTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-00-1.

Autores: Braulio de Diego, Elías J. Gordillo y Gerardo Valeiras.

Obra dirigida por José Luis Vicente Córdoba (Catedrático de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla). Contiene 427 problemas totalmente resueltos y más de 848 cuestiones. Cada capítulo se inicia con un resumen teórico.

Capítulo 1: Matrices. Operaciones elementales. Determinantes. Matriz inversa. Rango o característica de una matriz. Sistemas de ecuaciones lineales: método de reducción de Gauss. Capítulo 2: Espacios vectoriales. Subespacios. Dependencia lineal. Espacio cociente. Base y dimensión. Coordenadas. Cambio de base. Escalonamiento de vectores. Aplicaciones del Teorema de Rouché-Fröbenius. Capítulo 3: Aplicaciones lineales. Núcleo e imagen. Matrices asociadas a una aplicación lineal. Formas lineales. Espacio dual. Capítulo 4: Autovectores y autovalores. Polinomios característico y mínimo. Matrices diagonalizables. Diagonalización de matrices simétricas reales. Formas canónicas de Jordan: métodos de la partición de multiplicidades y de los divisores elementales. Aplicaciones.

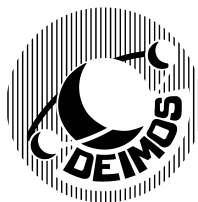
● **EJERCICIOS DE ANÁLISIS (CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL). Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.**

QUINTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-02-5.

Autor: Braulio de Diego.

Capítulo 1: Interpolación. Capítulo 2: Sucesiones y topología en la recta real. Límites. Capítulo 3: Números complejos. Transformaciones. Capítulo 4: Límites y continuidad de funciones reales de variable real. Capítulo 5: Derivada y diferencial.

Capítulo 6: Teoremas del valor medio. Regla de L'Hôpital. Fórmulas de Taylor y Mac Laurin. Curvas. Capítulo 7: Cálculo de primitivas. Integral definida. Integrales impropias. Convergencia. Capítulo 8: Series numéricas. Sucesiones y series funcionales. Convergencia uniforme. Desarrollos en series de potencias. Capítulo 9: Ecuaciones algebraicas. Aproximación de raíces. Eliminación de incógnitas.



Distribución y pedidos a:

Editorial DEIMOS

Glorieta del Puente de Segovia, n.º 3

28011 MADRID

Teléfonos: 91 479 23 42 y 669 31 64 06

www.academiadeimos.es

editorial@academiadeimos.es
