José Manuel Gamboa Mutuberría
Catedrático de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid.

Francisco José Baena Muñoz
Profesor de Enseñanza Secundaria.

Braulio de Diego Martín
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria (excedente).
Profesor Titular de Escuela Universitaria. Universidad de Alcalá de Henares.

Agustín Llerena Achútegui
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad de Alcalá de Henares.

José María Lorenzo Magán
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad Complutense de Madrid.

María Belén Rodríguez Rodríguez
Catedrática de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.

Juan Manuel Hernández Rubio
Profesor de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad Complutense de Madrid.

Bruno Salgueiro Fanego
Profesor de Enseñanza Secundaria.

PROBLEMAS DE OPOSICIONES

MATEMÁTICAS

Tomo 10
(2019 y 2021)

DEIMOS

Preparación del ejercicio práctico de las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria

© Editorial Deimos
Glorieta del Puente de Segovia, 3
28011 Madrid
Tel.: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

I.S.B.N: 978-84-86379-98-8 (Tomo 10)
Depósito legal: M-27428-2021

Imprime: SERVICE POINT

Prólogo

La pandemia ocasionada por COVID 19 ha afectado a nuestras vidas, a la actividad económica en todos los sectores y, en particular, a la actividad académica. En las enseñanzas Primaria y Secundaria la falta de recursos tecnológicos ha dificultado mucho la transmisión de conocimientos, y esta no ha sido la única consecuencia negativa de esta epidemia; todos los expertos señalan que ha dejado muchas secuelas de carácter psicológico. Aunque los estudiantes universitarios y aquéllos que se preparan en academias para superar las oposiciones que dan acceso al ejercicio de la función docente en el sector público se han adaptado mejor a la enseñanza y aprendizaje en remoto, a nadie se le escapa que el esfuerzo realizado por docentes y discentes ha sido formidable.

Una primera consecuencia de lo anterior fue la incertidumbre con que vivieron los opositores no saber si se celebrarían Pruebas de Acceso a la Función Pública en la Enseñanza Secundaria a lo largo del año 2020. Finalmente éstas no se celebraron, por lo que el volumen que el lector tiene entre sus manos recoge las soluciones a los problemas propuestos en 2019 en la Comunidad de Baleares, la Comunidad Valenciana y la Comunidad de Galicia y a los problemas propuestos en 2021 en todas las comunidades autónomas. Se trata del volumen 10 de la colección *Problemas de Oposiciones de Matemáticas* que la Editorial Deimos publica desde hace casi de 50 años.

Como viene siendo norma para nosotros, hemos incorporado tantas figuras como hemos juzgado necesarias para la comprensión de las soluciones. Además, siempre que hemos encontrado soluciones esencialmente distintas de un mismo problema las hemos redactado. En ocasiones hemos considerado que no pocos lectores agradecerían explicaciones de los ingredientes que empleamos en la solución de un problema y por eso los hemos incluido bien al final o bien al principio de la solución.

Es muy llamativo que una proporción grande de los problemas propuestos en esta convocatoria ya lo habían sido en convocatorias anteriores, manteniendo la tendencia observada desde hace años. Como ya hicimos en el volumen 9 de esta colección hemos optado por incluir soluciones de cada problema, sin remitir al lector a otro volumen anterior en el que hubiera sido resuelto. En estas situaciones señalamos, a continuación del enunciado, en qué número de qué volumen se encuentra, total o parcialmente, una solución a un enunciado igual o semejante al que resolvemos. Creemos que esto hace la obra más útil, aunque lo que de verdad es útil al preparar el ejercicio práctico de las actuales oposiciones es intentar resolver los problemas por uno mismo.

En cualquier caso, el uso más provechoso de este volumen (y los anteriores) consiste en adoptar una actitud intermedia, es decir, merece la pena intentar resolver por uno mismo cada problema, pero conviene recurrir a las soluciones que el libro proporciona cuando hayamos dedicado un tiempo prudencial a su resolución. En ocasiones el lector se percatará de que los autores hemos cometido algún error, y le agradeceríamos que se pusiese en contacto con nosotros para advertirnos.

En una época en la que el mercantilismo lo invade todo y se juzga como interesante sólo aquello que genera beneficios económicos, es de agradecer el esfuerzo realizado por la Editorial Deimos publicando libros de estas características, destinados a un mercado muy reducido y, en consecuencia, sin apenas margen de beneficios. Para terminar queremos agradecer a nuestras familias habernos permitido privarles de nuestra compañía durante las horas de preparación del libro.

Madrid, Septiembre 2021

LOS AUTORES

Índice de problemas por Comunidades Autónomas

Año 2019

Año 2021

Índice temático de problemas

Álgebra

Análisis real

Cálculo diferencial

Cálculo integral

Combinatoria

Geometría

Probabilidad

Variable compleja

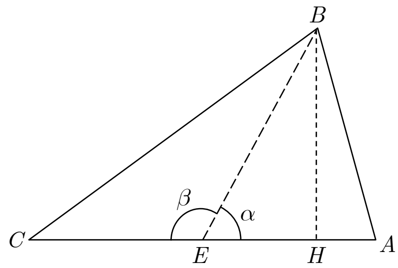
PROBLEMAS SELECCIONADOS

Problema propuesto en la Comunidad de Baleares en 2021

Número 21.57 *Sea E el punto medio del lado $\overline{AC}$ de un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ y sea S el área de este triángulo. Demuestre que si $\alpha = \measuredangle AEB$, entonces*

$$\cot\alpha = \frac{BC^2 - AB^2}{4S}$$

Este problema es también el 89.10 del volumen 3 y el 16.19 del volumen 8 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos, donde figura resuelto.



Una solución. Empleamos las notaciones de la figura y, en particular,

$$\measuredangle BEC = \beta = \pi - \alpha$$

Aplicamos el Teorema del coseno en los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle CEB$. Se tiene

$$BA^2 = AE^2 + EB^2 - 2AE\cdot EB\cos\alpha \quad \text{y} \quad BC^2 = EC^2 + EB^2 - 2EC\cdot EB\cos\beta$$

Además $\cos\beta = -\cos\alpha$ y $AE = EC$ porque E es el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Por eso, restando las igualdades anteriores,

$$BC^2 - BA^2 = 2AE\cdot EB\cos\alpha - 2AE\cdot EB\cos\beta = 2AE\cdot EB\cdot(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$= 2AE\cdot EB\cdot(\cos\alpha + \cos\alpha) = 4AE\cdot EB\cos\alpha$$

Por otro lado, el área S del triángulo $\triangle ABC$ vale

$$S = \frac{AC\cdot BH}{2} = AE\cdot BH = AE\cdot EB\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Dividiendo resulta

$$\frac{BC^2 - BA^2}{4S} = \frac{4AE\cdot EB\cos\alpha}{4AE\cdot EB\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \cot\alpha = \cot(\measuredangle AEB)$$

Otra solución. Supondremos que es $BC \geq AB$ (en caso contrario basta intercambiar los papeles de A y C en lo que sigue). Por un lado es

$$\cot \alpha = \frac{EH}{BH}$$

Por otro lado, al aplicar el Teorema de Pitágoras en los triángulos $\triangle BHC$ y $\triangle AHB$ se deducen:

$$CH^2 + BH^2 = BC^2, \qquad BH^2 + AH^2 = AB^2$$

y, al restar ambas igualdades, obtenemos

$$BC^2 - AB^2 = CH^2 - AH^2 = (CH + AH)(CH - AH) \tag{7.3}$$

Distinguimos ahora según que el ángulo $\measuredangle BAC$ sea agudo, recto u obtuso:

i) Si $\measuredangle BAC$ es un ángulo agudo, entonces $CH + AH = AC$ y

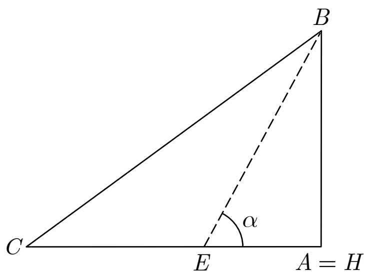
$$CH - AH = CE + EH - AH = (EA - AH) + EH = EH + EH = 2 \cdot EH$$

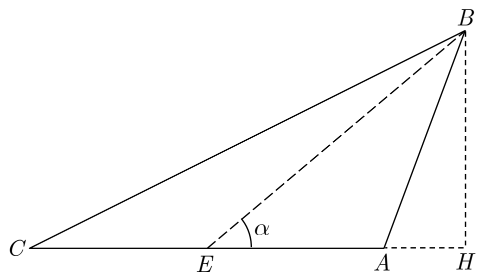
ii) Si $\measuredangle BAC$ es un ángulo recto, entonces $H = A$ y por tanto $CH + AH = AC$ y

$$CH - AH = AC = 2 \cdot EA = 2 \cdot EH$$

iii) Si $\measuredangle BAC$ es un ángulo obtuso, entonces $CH - AH = AC$ y

$$CH + AH = CE + EH + AH = EA + EH + EH - EA = 2 \cdot EH$$





Por tanto y según (7.3), en cualquier caso es

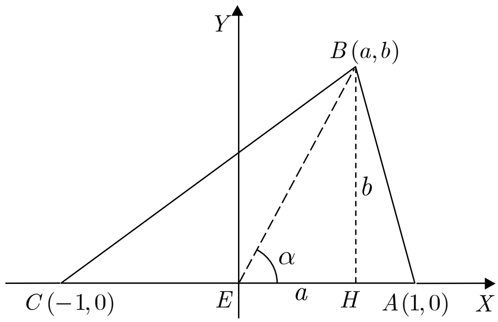
$$BC^2 - AB^2 = CH^2 - AH^2 = 2 \cdot AC \cdot EH$$

Entonces, multiplicando y dividiendo la igualdad anterior por $2 \cdot BH$, se tiene que:

$$BC^2 - AB^2 = 2 \cdot AC \cdot EH = \left(4 \cdot \frac{EH}{BH}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH\right) = 4 \cdot \cot \alpha \cdot S$$

como había que demostrar.

Una solución más. Elegimos un sistema de referencia cartesiano rectangular del plano centrado en el punto E y respecto del que las coordenadas de los vértices son $A = (1, 0)$, $C = (-1, 0)$ y $B = (a, b)$, con $b > 0$.



En tal caso, al aplicar el Teorema de Pitágoras en los triángulos $\triangle BHC$ y $\triangle AHB$ se deduce que

$$BC^2 = (a+1)^2 + b^2$$

$$AB^2 = (a-1)^2 + b^2$$

Restando ahora ambas igualdades:

$$BC^2 - AB^2 = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$$

Dado que son

$$\cot \alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{y} \qquad S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b = b$$

se deduce finalmente:

$$4S \cdot \cot \alpha = 4b \cdot \frac{a}{b} = 4a = BC^2 - AB^2$$

Problema propuesto en la Comunidad de Castilla-La Mancha en 2021

Número 21.106 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define*

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx.$$

(1) *Encuentre una fórmula para calcular A_n a partir de n*

(2) *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

Este problema es muy similar a los que figuran resueltos en las páginas 264 y 306 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. Está relacionado con la Fórmula de Wallis cuya demostración puede consultarse en la página 37 del volumen 7 de dicha colección.

Una solución. (1) Supongamos que n es un número natural mayor o igual que 2. Si en la integral A_n hacemos $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$, $dv = \operatorname{sen} x dx$, entonces resultan $du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \, dx$, $v = -\cos x$, se cumple, integrando por partes, que

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = -\left[\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x(1-\operatorname{sen}^2 x) \, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n$$

es decir, para cada $n \geq 2$,

$$A_n = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n$$

y, despejando A_n,

$$A_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) A_{n-2}$$

Dado que son

$$A_0 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad A_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = -[\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

si convenimos en que $0!! = 1$, al tirar del hilo recurrente se deduce que:

(i) Si $n \in \mathbb{N}$ es impar,

$$A_n = \frac{n-1}{n} \cdot A_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot A_{n-4} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot A_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(ii) Si $n \in \mathbb{N}$ es par, es $A_0 = \frac{\pi}{2}$ y si $n \geq 2$,

$$A_n = \frac{n-1}{n} \cdot A_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot A_{n-4} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) Para cada $x \in [0, \pi/2]$, ocurre que

$$\operatorname{sen}^{n+2} x \leq \operatorname{sen}^{n+1} x \leq \operatorname{sen}^n x$$

y, al integrar cada miembro entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ se tiene, por la propiedad de monotonía de la integral, que

$$A_{n+2} \leq A_{n+1} \leq A_n$$

y, dividiendo por A_n, resulta

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} \leq \frac{A_{n+1}}{A_n} \leq 1 \tag{11.5}$$

Cancelando $\frac{\pi}{2}$ en el caso n par, se tiene, tanto si n es par como si es impar, que

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} = \frac{n!! \cdot (n+1)!!}{(n-1)!! \cdot (n+2)!!} = \frac{n+1}{n+2}$$

y de la aplicación de la Regla del sandwich en (11.5) se deduce que la sucesión $\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)$ es convergente y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1$$

y que, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Observación. Facilitamos aquí otra forma de obtener la relación recurrente

$$A_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot A_{n-2}$$

Si denotamos D al operador derivada, se tiene, para cada $n \geq 2$,

$$D\left[\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\right] = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^n x$$

y al integrar la identidad anterior en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se tiene que

$$\left[\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} = (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = (n-1)A_{n-2} - (n-1)A_n - A_n \quad \Longrightarrow \quad A_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot A_{n-2}$$

Otra solución. (1) Si $n = 0$, entonces

$$A_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si es $n \geq 1$, recurriendo a la expresión trigonométrica de la integral euleriana beta (véase la observación tras las soluciones del problema 21.54), deducimos que $A_n = \frac{1}{2}\mathrm{B}(p,q)$, donde $2p-1 = n$ y $2q-1 = 0$, es decir, $p = \frac{n+1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$, luego

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

Los valores de $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ y $\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$ dependen de la paridad de n, así que distinguimos:

(i) Si n es impar, puede escribirse $n = 2k-1$ para cierto $k \geq 1$, luego $\frac{n+1}{2} = k$, $\frac{n+2}{2} = k + \frac{1}{2}$ y

$$A_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(k)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{(k-1)!}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2^{k-1}\cdot(k-1)!}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1} = \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1} = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(ii) Si n es par, entonces será $n = 2k$ para cierto $k \geq 1$, luego $\frac{n+1}{2} = k + \frac{1}{2}$ y $\frac{n+2}{2} = k + 1$ y

$$A_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{k!}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k \cdot k!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 21}{2k\,(2k-2)\cdots 4 \cdot 2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

(2) Para demostrar que la sucesión $\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)$ es convergente hacia un límite ℓ, es suficiente (y necesario) probar que las dos subsucesiones

$$\left(\frac{A_{2n-1}}{A_{2n}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}}\right)$$

son convergentes hacia ℓ. Puestos a ello, en virtud de la expresión obtenida para A_n,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{A_{2n-1}}{A_{2n}}\right) = \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-2)!! \cdot (2n)!!}{(2n-1)!! \cdot (2n-1)!!}$$

Dado que, según la fórmula de Wallis, cuando $n \to \infty$, es

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi}$$

deducimos, recurriendo al Principio de sustitución, que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{A_{2n-1}}{A_{2n}}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \cdot \sqrt{(n-1)\pi} \cdot \sqrt{n\pi}\right) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-n}}{2n-1} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Del mismo modo,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!\cdot(2n+1)!!}{(2n)!!\cdot(2n)!!}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left((2n+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=1$$

Problema propuesto en la Comunidad de Extremadura en 2021

OPCIÓN B

Número 21.132 *Diecisiete personas van a jugar a un casino y se reparten fichas de igual valor a partes iguales sobrando tres. Seis de los jugadores se encuentran cansados y deciden irse a dormir. El resto vuelve a repartir las fichas sobrando cuatro. Al fin, sólo seis deciden jugar y reparten de nuevo las fichas sobrando cinco esta vez. Calcula el número total de fichas sabiendo que está comprendido entre* 1500 *y* 3000.

Una solución. Sea x el número total de fichas. Al dividir x por 17 el resto es 3, al dividir x por 11 se obtiene como resto 4 y, por último, al dividir x por 6 el resto es 5, es decir,

$$x \equiv 3 \pmod{17}, \qquad x \equiv 4 \pmod{11}, \qquad x \equiv 5 \pmod{6}$$

Se trata por tanto de encontrar un número natural x comprendido entre 1500 y 3000 que sea solución del sistema de congruencias lineales anterior. Por ser los módulos 17, 11 y 6 coprimos dos a dos, según el Teorema chino de los restos, el sistema tiene solución única módulo $17 \cdot 11 \cdot 6 = 1122$.

Para encontrarla, si x es solución del sistema, lo es de la primera ecuación, luego será $x = 3 + 17r$, para algún $r \in \mathbb{Z}$. Al sustituir en la segunda congruencia, se tiene

$$3 + 17r \equiv 4 \pmod{11} \quad \Rightarrow \quad 17r \equiv 1 \pmod{11} \quad \Rightarrow \quad 6r \equiv 1 \pmod{11} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6r \equiv 12 \pmod{11} \quad \Rightarrow \quad r \equiv 2 \pmod{11}$$

por ser $\operatorname{mcd}(6, 11) = 1$. Por tanto $r = 2 + 11s$, donde $s \in \mathbb{Z}$ y será $x = 3 + 17(2 + 11s) = 37 + 187s$. Como x cumple la última congruencia y $187 \equiv 1 \pmod{6}$:

$$37 + 187s \equiv 5 \pmod{6} \quad \Rightarrow \quad 187s \equiv -32 \pmod{6} \quad \Rightarrow \quad s \equiv 4 \pmod{6}$$

es decir, $s = 4 + 6t$, para algún $t \in \mathbb{Z}$, y por tanto, cualquier solución del sistema de congruencias lineales es

$$x = 37 + 187s = 37 + 187(4 + 6t) = 785 + 1122t \qquad (t \in \mathbb{Z})$$

Como el número x de fichas está comprendido entre 1500 y 3000, deberá cumplirse que $1500 \leq 785 + 1122t \leq 3000$, es decir, $715 \leq 1122t \leq 2215$, inecuación doble cuya única solución entera es $t = 1$. El número total de fichas es, en consecuencia,

$$x = 785 + 1122 \cdot 1 = 1907$$

Otra solución. La demostración del Teorema chino de los restos es constructiva, lo que proporciona un algoritmo para obtener, *sin pensar,* una solución del sistema de congruencias. Una vez obtenida una solución, para obtener otra que cumpla ciertas restricciones se procede como en la solución anterior.

Para obtener una solución comenzamos expresando 1 como combinación de 17 y $11 \cdot 6 = 66$. Dividimos sucesivamente:

$$66 = 4 \cdot 17 - 2, \quad 17 = 2 \cdot 9 - 1$$

lo proporciona la igualdad

$$1 = 9 \cdot 2 - 17 = 9(4 \cdot 17 - 66) - 17 = 35 \cdot 17 - 9 \cdot 66 = u_1 + v_1$$

donde $u_1 := 35 \cdot 17$ y $v_1 := -9 \cdot 66 = -594$. Repetimos el proceso con 11 y $4 \cdot 17 = 68$. Se tiene $68 = 6 \cdot 11 + 2$ y $11 = 6 \cdot 2 - 1$, así que

$$1 = 6 \cdot 2 - 11 = 6 \cdot (68 - 6 \cdot 11) - 11 = -37 \cdot 11 + 6 \cdot 68 = u_2 + v_2$$

donde $u_2 := -37 \cdot 11$ y $v_2 := 6 \cdot 68 = 408$. Por último, expresamos 1 como combinación de 6 y $11 \cdot 17 = 187$. En este caso basta observar que

$$1 = -6 \cdot 31 + 187 = u_3 + v_3, \quad \text{donde } u_3 := -6 \cdot 31 \ \text{ y } \ v_3 := 187$$

Denotamos $x_1 := 3$, $x_2 := 4$ y $x_3 := 5$, y se desprende de la demostración del Teorema Chino de los restos que una solución de las congruencias dadas es

$$x := \sum_{i=1}^{3} x_i v_i = -3 \cdot 594 + 4 \cdot 408 + 5 \cdot 187 = 785$$

PUBLICACIONES

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 1: 1969 a 1980.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  CUARTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-94-0.

  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.

  Obra dedicada a la resolución, con todo detalle, de los 509 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 598 pág., ofreciéndose dos métodos de resolución cuando se ha considerado oportuno.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 2: 1981 a 1987.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  TERCERA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-89-6.

  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.

  Contiene, en 768 páginas, 773 problemas totalmente[1] resueltos que fueron propuestos en las citadas oposiciones, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 3: 1988 a 1995.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-34-6.

  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena y Mariano Llerena.

  Contiene totalmente[1] resueltos 551 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 672 pág., convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 4: 1996 a 2005.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-86-5.

  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa y José Mª Lorenzo.

  Contiene totalmente[1] resueltos 378 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 1004 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

---

[1] Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 5: 2006 a 2012.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  TERCERA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-92-6

  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente[1] resueltos 194 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 718 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 6: 2014.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  I.S.B.N. 978-84-86379-87-2

  Autores: Braulio de Diego, Francisco Baena, Agustín Llerena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente[1] resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 168 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 7: 2015.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  I.S.B.N. 978-84-86379-91-9

  Autores: Francisco Baena, José Manuel Gamboa, Braulio de Diego, Agustín Llerena, Mª Belén Rodríguez, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente[1] resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 238 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 8: 2016.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  I.S.B.N. 978-84-86379-93-3

  Autores: Francisco Baena, José Manuel Gamboa, Braulio de Diego, Agustín Llerena, Mª Belén Rodríguez, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente[1] resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 378 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 9: 2017 y 2018.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-96-4

  Autores: José Manuel Gamboa, Francisco Baena, Braulio de Diego, Agustín Llerena, José Mª Lorenzo, Mª Belén Rodríguez, José F. Fernando y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 400 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

---

[1] Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 10: 2019 y 2021.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  I.S.B.N. 978-84-86379-98-8

  Autores: José Manuel Gamboa, Francisco Baena, Braulio de Diego, Agustín Llerena, José Mª Lorenzo, Mª Belén Rodríguez, Juan M. Hernández y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 536 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **TEMAS DE OPOSICIONES A PROFESOR DE ENSEÑANZA SECUNDARIA.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-48-3. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-47-6. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-49-0.

  Autores: Braulio de Diego, Francisco Padilla y Agustín Llerena.

  Obra de 3 volúmenes en la que se desarrollan todos los temas del Temario de Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, especialidad de Matemáticas

- **PROGRAMACIONES Y UNIDADES DIDÁCTICAS.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria.
  Matemáticas.
  Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-74-2. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-75-9. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-76-6. Tomo 4, 978-84-86379-77-3.

  Autores: Fernando García, Antonio J. López, Manuel López, José Mª Lorenzo, Jorge Quereda, Manuela Redondo y Mª Teresa Sánchez

  Figuran desarrolladas las programaciones de las asignaturas de Matemáticas de 1º y 2º de E.S.O. en el Tomo 1; 3º y 4º (Opciones A y B) de E.S.O. en el Tomo 2; las Matemáticas I y II del Bachillerato de Ciencias y Tecnología en el Tomo 3; y las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II en el Tomo 4. Además, con cada programación se desarrollan al menos quince unidades didácticas.

- **PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL.**
  Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.
  CUARTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-00-1.

  Autores: Braulio de Diego, Elías J. Gordillo y Gerardo Valeiras.

  Obra dirigida por José Luis Vicente Córdoba (Catedrático de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla). Contiene 427 problemas totalmente resueltos y más de 848 cuestiones. Cada capítulo se inicia con un resumen teórico.
  Capítulo 1: Matrices. Operaciones elementales. Determinantes. Matriz inversa. Rango o característica de una matriz. Sistemas de ecuaciones lineales: método de reducción de Gauss. Capítulo 2: Espacios vectoriales. Subespacios. Dependencia lineal. Espacio cociente. Base y dimensión. Coordenadas. Cambio de base. Escalonamiento de vectores. Aplicaciones del Teorema de Rouché-Fröbenius. Capítulo 3: Aplicaciones lineales. Núcleo e imagen. Matrices asociadas a una aplicación lineal. Formas lineales. Espacio dual. Capítulo 4: Autovectores y autovalores. Polinomios característico y mínimo. Matrices diagonalizables. Diagonalización de matrices simétricas reales. Formas canónicas de Jordan: métodos de la partición de multiplicidades y de los divisores elementales. Aplicaciones.

- **EJERCICIOS DE ANÁLISIS (CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL). Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.**

QUINTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-02-5.

Autor: Braulio de Diego.

Capítulo 1: Interpolación. Capítulo 2: Sucesiones y topología en la recta real. Límites. Capítulo 3: Números complejos. Transformaciones. Capítulo 4: Límites y continuidad de funciones reales de variable real. Capítulo 5: Derivada y diferencial.
Capítulo 6: Teoremas del valor medio. Regla de L'Hôpital. Fórmulas de Taylor y Mac Laurin. Curvas. Capítulo 7: Cálculo de primitivas. Integral definida. Integrales impropias. Convergencia. Capítulo 8: Series numéricas. Sucesiones y series funcionales. Convergencia uniforme. Desarrollos en series de potencias. Capítulo 9: Ecuaciones algebraicas. Aproximación de raíces. Eliminación de incógnitas.

Distribución y pedidos a:

Editorial DEIMOS
Glorieta del Puente de Segovia, n.º 3
28011 MADRID
Teléfonos: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es
