1. Dos arqueros, A y B, participan en una competición clasificatoria. Mediante un sorteo previo se decide que el tirador A inicia la actuación. A dispara una flecha, y se clasifica si da en el centro de la diana. Si no lo consigue, es B quien toma la iniciativa, y gana la competición si logra dar en el centro de la diana. En caso contrario, vuelve a tirar A y se repite el proceso descrito anteriormente. De este modo, se van alternando los tiros hasta que uno acierta con el centro de la diana, momento en el que termina la competición con la clasificación del arquero que lo ha conseguido. En cada uno de sus tiros A y B tienen, respectivamente, probabilidad p y q de alcanzar el centro de la diana.

a) Halle la probabilidad de que el arquero A se clasifique.

b) Calcule la probabilidad de que sea el arquero B que se clasifique.

c) ¿Qué condición han de verificar p y q para que el arquero B tenga ventaja sobre A? ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

SOLUCIÓN:

a) Definimos el suceso A_n: "*el jugador* A *se clasifica en su n-ésimo intento*". Se tienen entonces:

$$p(A_1) = p, \qquad p(A_2) = (1-p)(1-q)\,p, \qquad p(A_3) = (1-p)^2(1-q)^2\,p, \qquad \ldots$$

y, en general,

$$p(A_n) = (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}\, p, \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

La probabilidad de que el arquero A se clasifique será, por tanto,

$$p(C_A) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} p = p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)(1-q)]^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{p+q-pq}$$

por tratarse de la suma de una serie geométrica de razón $(1-p)(1-q)$.

b) Del mismo modo definimos el suceso B_n: "*el jugador* B *se clasifica en su n-ésimo intento*". Se tienen entonces:

$$p(B_1) = (1-p)\,q, \qquad p(B_2) = (1-p)^2(1-q)\,q, \qquad p(B_3) = (1-p)^3(1-q)^2\, q, \qquad \ldots$$

y, en general,

$$p(B_n) = (1-p)^n(1-q)^{n-1}\, q, \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

La probabilidad de que el arquero B se clasifique será, en consecuencia,

$$p(C_B)=p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} p(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n(1-q)^{n-1}q=q(1-p)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}[(1-p)(1-q)]^{n-1}=\frac{q(1-p)}{1-(1-p)(1-q)}=\frac{q-pq}{p+q-pq}$$

También podíamos haber deducido la probabilidad de que se clasifique B teniendo en cuenta que la probabilidad de que no se clasifique ninguno de los dos es, por ser $0<p,q<1$,

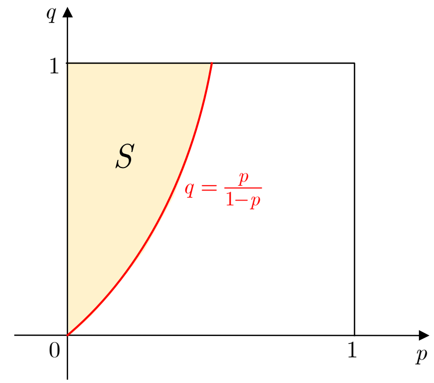
$$(1-p)(1-q)(1-p)(1-q)\cdots=\lim_{n\to\infty}[(1-p)(1-q)]^n=0$$

De ello se sigue que

$$p(C_B)=1-p(C_A)=1-\frac{p}{p+q-pq}=\frac{q-pq}{p+q-pq}$$

c) El arquero B tendrá ventaja sobre el arquero A si ocurre que $p(C_B)>p(C_A)$, es decir, si ocurre que

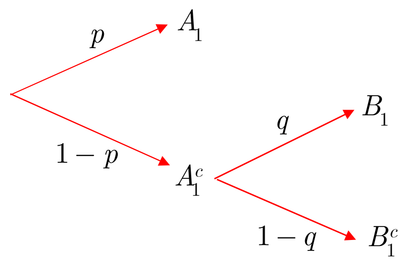
$$q-pq>p \qquad \Leftrightarrow \qquad q(1-p)>p \qquad \Leftrightarrow \qquad q>\frac{p}{1-p}$$



Para calcular la probabilidad de que se dé esta situación, dado que p y q toman valores en el intervalo abierto $(0,1)$, podemos asignarles distribuciones uniformes (independientes) en dicho intervalo. El espacio muestral a considerar sería por tanto, $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ Dado que el área del conjunto Ω es 1, la probabilidad a calcular es el área del recinto $S = \left\{(p,q)\in(0,1)\times(0,1) : q > \frac{p}{1-p}\right\}$, es decir,

$$\text{área}\,(S) = \int_0^{1/2}\left(1-\frac{p}{1-p}\right)dp = \int_0^{1/2}\left(2-\frac{1}{1-p}\right)dp = \Big[2p + \mathrm{L}\,(1-p)\Big]_0^{1/2} = 1 - \mathrm{L}\,2$$

OTRA SOLUCIÓN A LOS APARTADOS a) y b):



Condicionando únicamente a lo sucedido en el primer intento de cada uno de los dos arqueros, se deduce que

$$p(C_A) = p(A_1) + p(A_1^c \cap B_1^c)\cdot p(C_A \mid A_1^c \cap B_1^c)$$

Dado que la probabilidad de que se clasifique el arquero A caso de que ninguno de los dos arqueros dé en la diana en su primer intento es la misma que al comienzo de la competición, se llega entonces a la ecuación

$$p(C_A) = p + (1-p)(1-q)\cdot p(C_A)$$

Despejando $p(C_A)$ en la ecuación anterior se deduce que

$$p(C_A) = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{p+q-pq}$$

Razonando del mismo modo sobre el arquero B, se tiene:

$$p(C_B) = p(B_1) + p(A_1^c \cap B_1^c)\cdot p(C_B \mid A_1^c \cap B_1^c)$$

llegando así a la ecuación

$$p(C_A) = (1-p)q + (1-p)(1-q)\cdot p(C_B)$$

cuya solución es

$$p(C_B) = \frac{(1-p)q}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{q-pq}{p+q-pq}$$

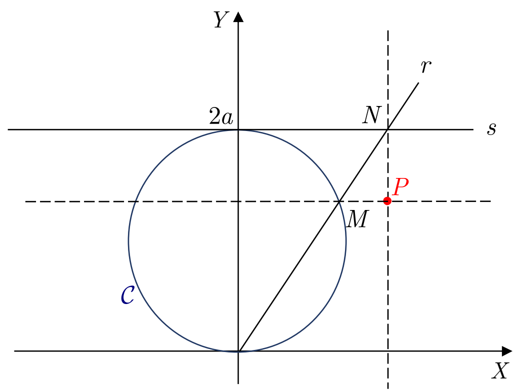
2. Se consideran los siguientes elementos en el plano: $\mathcal{C}$ es la circunferencia de centro el punto $C(0,a)$ y radio a, donde $a>0$, y s es la recta que horizontal que pasa por el punto $(0,2a)$. Se dibuja una recta r que pase por el origen de coordenadas y por cualquier punto M de la circunferencia distinto del origen de coordenadas. Sea N el punto de intersección de la recta anterior con la recta s. Se considera la curva que se obtiene por la intersección de la recta horizontal que pasa por M y la recta vertical que pasa por N, al recorrer M la circunferencia $\mathcal{C}$.

a) Determine la ecuación de la curva.

b) Halle el área de la región delimitada por la curva y el eje de abscisas.

Este problema es casi idéntico al que figura resuelto en la página 276 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones, de Editorial Deimos y que ha sido resuelto en la Academia Deimos durante el curso 2020-2021

UNA SOLUCIÓN:



a) La circunferencia $\mathcal{C}$ tiene por ecuación $x^2+(y-a)^2=a^2$; la recta s tiene por ecuación $y=2a$. Como la recta r pasa por el origen y corta a $\mathcal{C}$ en algún punto distinto del origen, r no es el eje OX, luego admite por ecuación $x=my$, para cierto $m\in\mathbb{R}$.

El punto M es la solución del sistema

$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=a^2 \\ x=my \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2ay=0 \\ x=my \end{cases} \Rightarrow m^2y^2+y^2-2ay=0 \Rightarrow y[(m^2+1)y-2a]=0$$

Y como es $y\neq 0$, se deduce que $(m^2+1)y-2a=0$, es decir, la ordenada de M es

$$y=\frac{2a}{1+m^2}$$

Por otro lado, el punto N, intersección de r y s, es la solución del sistema $x=my$, $y=2a$, por lo que su abscisa es $x=2ma$. Como la abscisa y la ordenada de un punto P genérico de la curva solución son, respectivamente, la abscisa de N y la ordenada de M, deducimos que $P(x,y)$ es un punto de la curva solución si y sólo si, para cierto $m\in\mathbb{R}$, son:

$$x=2ma, \qquad y=\frac{2a}{1+m^2}$$

Las anteriores son unas ecuaciones paramétricas de la curva solución. Despejando $m=\frac{x}{2a}$ en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, se obtiene:

$$y=\frac{2a}{1+(\frac{x}{2a})^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$

que es la ecuación explícita de la curva que se pide.

b) La curva solución es la gráfica de la función

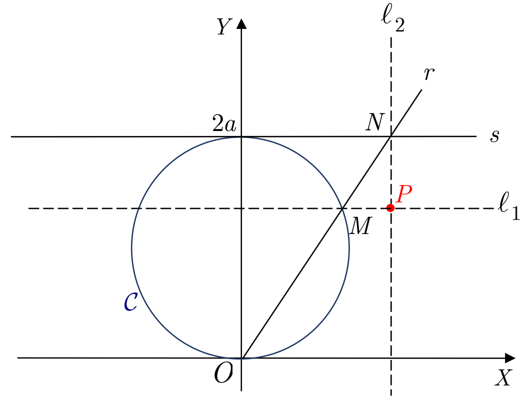
$$x\mapsto y=f(x)=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$

Se trata de una función definida, continua y positiva en todo $\mathbb{R}$ por ser $a>0$. Dado que $f(-x)=f(x)$ para todos los x reales, la función f es par, luego su gráfica es simétrica respecto del eje OY. De todo ello se deduce que el área de la región comprendida entre la gráfica de f y el eje OX es

$$S=2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=2\int_0^{+\infty}\frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,dx=8a^2\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{2a}}{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+1}\,dx=8a^2\cdot\Big[\arctan\frac{x}{2a}\Big]_0^{+\infty}=8a^2\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=4\pi a^2$$

OTRA SOLUCIÓN:



a) Un punto genérico M de la circunferencia $\mathcal{C}$ distinto del origen de coordenadas tiene por coordenadas $M=(a\cos t, a(1+\operatorname{sen} t))$, donde $t\neq -\frac{\pi}{2}$, mientras que $N=(x,2a)$, para cierto $x\in\mathbb{R}$. Como los puntos O, M y N están alineados, los vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ tienen coordenadas proporcionales, luego

$$\begin{vmatrix} a\cos t & x \\ a(1+\operatorname{sen} t) & 2a \end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{2a\cos t}{1+\operatorname{sen} t}, \qquad \text{donde } t\neq -\frac{\pi}{2}$$

Si ℓ_1 es la recta horizontal que pasa por M y ℓ_2 la recta vertical que pasa por N, su punto de corte $P=\ell_1\cap\ell_2$ tiene por abscisa la de N y por ordenada la de M, luego unas ecuaciones paramétricas de la curva del enunciado son

$$x=\frac{2a\cos t}{1+\operatorname{sen} t}, \qquad y=a(1+\operatorname{sen} t), \qquad \text{donde} \quad t\neq -\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

Para obtener una ecuación implícita de la curva, despejamos $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ en función de x e y. Por un lado,

$$\operatorname{sen} t = \frac{y}{a} - 1$$

Por otro, multiplicando se tiene $xy = 2a^2 \cos t$, así que

$$\cos t = \frac{xy}{2a^2}$$

En consecuencia,

$$1 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = \frac{x^2y^2}{4a^4} + \left(\frac{y}{a} - 1\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2y^2}{4a^4} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{2y}{a} = 0$$

De hecho $y \neq 0$, ya que $t \neq -\frac{\pi}{2}$ en (1). Dividiendo por y la última ecuación resulta:

$$y \cdot \left(\frac{x^2}{4a^4} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{a} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

que es una ecuación implícita de la curva que pide el problema.

b) La gráfica de la curva es simétrica respecto del eje vertical OY, luego el área encerrada por la curva y el eje de abscisas es

$$S = 2\int_0^{+\infty} \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\,dx = 16a^3\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4a^2}$$

Si recurrimos al cambio de variable $x = 2a\tan u$, para $x = 0$ y $x \to +\infty$ se tienen, respectivamente, $u = 0$ y $u = \frac{\pi}{2}$. Además, como son $dx = 2a\sec^2 u\,du$ y $4a^2 + x^2 = 4a^2 + 4a^2\tan^2 u = 4a^2\sec^2 u$, se deduce que

$$S = 16a^3\int_0^{\pi/2} \frac{2a\sec^2 u}{4a^2\sec^2 u}\,du = 8a^2\int_0^{\pi/2} du = 8a^2\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi a^2$$

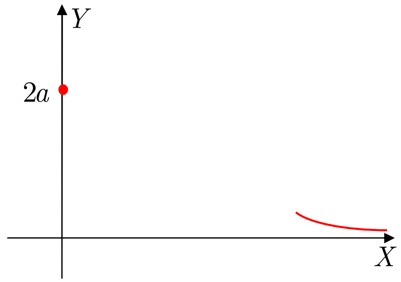
OBSERVACIÓN: Aunque no sea en absoluto necesario para la resolución del problema, dibujaremos la curva solución, que es la gráfica de la función

$$x \mapsto y = f(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$

Como ya se ha dicho, la función f está definida, es continua y positiva en todo $\mathbb{R}$ y además es par, luego su gráfica es simétrica respecto del eje OY. Limitaremos por ello el estudio de f a los $x \in [0,+\infty)$.

En $x=0$ es $f(0)=2a$, mientras que cuando $x\to+\infty$ ocurre que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8a^3}{x^2+4a^2}=0$$



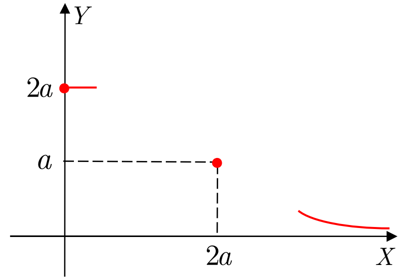
por lo que la recta $y=0$ es asíntota de la curva cuando $x\to+\infty$. Como además $f(x)>0$ para todo x, la curva se aproxima a la asíntota por encima de la misma. Por otro lado, f es derivable y para cada $x\geq 0$ es

$$f'(x)=\frac{-16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$$

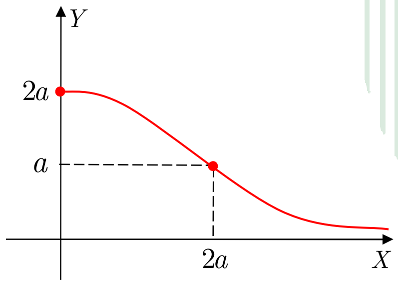
La derivada sólo se anula en $x=0$ y es $f'(x)<0$ para todo $x>0$, por lo que f alcanza máximo absoluto en $x=0$, siendo $\max f=f(0)=2a$ y es estrictamente decreciente en todo el intervalo $[0,+\infty)$. También f es dos veces derivable en cada $x\geq 0$ y

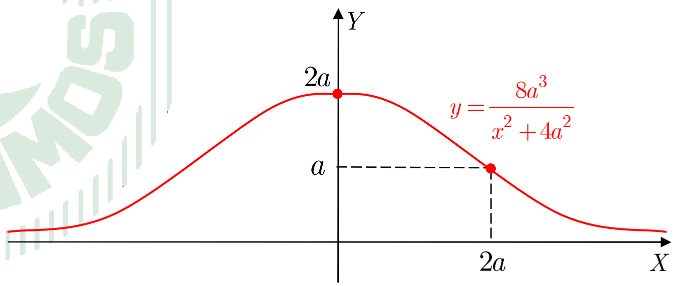
$$f''(x)=\frac{48a^3x^2-64a^5}{(x^2+a^2)^3}=\frac{16a^3(x^2-4a^2)}{(x^2+a^2)^3}$$

Ahora es $f''(x)=0$ sólo cuando $x^2=4a^2$, esto es, cuando $x=2a$ y ocurre que $f''(x)<0$ cuando $0\leq x<2a$ y $f''(x)>0$ cuando $x>2a$, por lo que f es estrictamente cóncava en el intervalo $(0,2a)$ y estrictamente convexa en el intervalo $(2a,+\infty)$, de modo que la gráfica tiene inflexión en el punto $(2a,f(2a))=(2a,a)$.



De todo lo anterior se deduce la gráfica de f restringida al intervalo $[0,+\infty)$, que es la que figura a la izquierda. Si se le añade su simétrica respecto del eje OY se tiene la gráfica de f, que es la curva del enunciado.





3. Un hombre acude a un banco a cobrar un cheque por valor de E euros y C céntimos. El cajero, por error, le entrega un sobre con C euros y E céntimos. El cliente no se da cuenta del error hasta que gasta 23 céntimos y, además, observa que en ese momento tiene $2E$ euros y $2C$ céntimos ¿Cuál es el valor del cheque?

Este problema es idéntico al 18.63 del volumen 9 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos, que ha sido resuelto en la Academia Deimos durante el curso 2020-2021.

UNA SOLUCIÓN: El hombre sale del banco con C euros y E céntimos, es decir, con $100C+E$ céntimos, que se reducen a $100C+E-23$ céntimos después de gastar 23 céntimos. Si este dinero es el doble del importe del cheque, será (expresado en céntimos):

$$100C + E - 23 = 200E + 2C$$

es decir,

$$98C - 199E = 23 \tag{1}$$

Como los números 98 y 199 son primos entre sí, la ecuación diofántica anterior tiene soluciones enteras (C,E). Para encontrarlas, podemos recurrir a las congruencias como sigue: Si (C,E) es solución entera de la ecuación, será $199E=-23+98C$ y por tanto $199E\equiv -23 \pmod{98}$. Dado que $199\equiv 3 \pmod{98}$ y que $-23\equiv 75 \pmod{98}$, deducimos que $3E\equiv 75 \pmod{98}$, congruencia que equivale, por ser $\operatorname{mcd}(3,98)=1$, a que sea $E\equiv 25 \pmod{98}$.

Será, por tanto, para cierto $t \in \mathbb{Z}$,

$$E = 25 + 98\,t\,.$$

Llevando este valor a la ecuación (1) se sigue que

$$98C - 199\,(25 + 98t) = 23 \quad \Leftrightarrow \quad 98C = 4998 + 199 \cdot 98\,t$$

y, tras dividir ambos miembros por 98,

$$C = 51 + 199\,t$$

Como deben ser $0 \leq C \leq 99$ y $E \geq 0$, es decir, $0 \leq 51 + 199\,t \leq 99$ y $25 + 98\,t \geq 0$, deducimos que, por ser $t \in \mathbb{Z}$, necesariamente es $t = 0$. Serán, en consecuencia, $E = 25$ y $C = 51$, por lo que el valor del cheque es de 25 euros y 51 céntimos.

OBSERVACIÓN: Otra forma de resolver la ecuación diofántica $98C - 199E = 23$ consiste en encontrar una solución particular, recurriendo al *Algoritmo de Euclides* para el cálculo de $\operatorname{mcd}(98{,}199) = 1$. Dado que son

$$199 = 98 \cdot 2 + 3, \qquad 98 = 3 \cdot 32 + 2, \qquad 3 = 2 \cdot 1 + 1$$

podemos escribir 1 como combinación lineal entera de 98 y 199 razonando de derecha a izquierda en los cálculos anteriores. Resulta así:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (98 - 3 \cdot 32) = 33 \cdot 3 - 98 = 33 \cdot (199 - 98 \cdot 2) - 98 = 98 \cdot (-67) - 199 \cdot (-33)$$

es decir,

$$98 \cdot (-67) - 199 \cdot (-33) = 1\,.$$

Multiplicando esta relación por 23, se obtiene:

$$98 \cdot (-1541) - 199 \cdot (-759) = 23$$

lo que demuestra que $C_0 = -1541$, $E_0 = -759$ es una solución particular de nuestra ecuación $98C - 199E = 23$. Cualquier solución entera de la ecuación es por tanto de la forma

$$(C, E) = (-1541 - 199s, -759 - 98s), \qquad s \in \mathbb{Z}\,,$$

Como son $0 \le C \le 99$ y $E \ge 0$, deben ser $0 \le -1541 - 199s \le 99$ y $-759 - 98s \ge 0$, que se reducen, por ser $s \in \mathbb{Z}$, a $s = -8$. Son así $C = -1541 - 199 \cdot (-8) = 51$ y $E = -759 - 98 \cdot (-8) = 25$, obteniéndose como valor del cheque 25 euros y 51 céntimos.

4. Dado el determinante de orden n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

se pide:

a) Calcule su valor.

b) Determine para qué números naturales positivos n dicho valor es múltiplo de 10.

SOLUCIÓN:

a) Al sustituir la primera columna por la suma de todas las columnas del determinante, el valor de éste no varía, resultando que

$$D_n = \begin{vmatrix} 8+3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 8+3(n-1) & 8 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 8+3(n-1) & 3 & 8 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 8+3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 8 & 3 \\ 8+3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Si ahora se mantiene la primera fila y se sustituye cada fila a partir de la segunda por su diferencia con la primera, el determinante permanece invariado, obteniéndose que

$$D_n = \begin{vmatrix} 8+3(n-1) & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Ahora ya, el determinante anterior es triangular, luego su valor es igual al producto de los elementos de su diagonal, es decir,

$$D_n = [8+3(n-1)]\cdot 5^{n-1}$$

o bien,

$$D_n = (3n+5)\cdot 5^{n-1}$$

b) A la vista del exponente de la potencia de 5 en la expresión de D_n, distinguimos sobre los valores enteros y positivos de n como sigue:

i) Si $n = 1$, entonces $D_1 = 8$, que no es múltiplo de 10.

ii) Si $n > 1$, como quiera que es $10 = 2\cdot 5$ y 2 y 5 son primos entre sí, D_n será múltiplo de 10 si y sólo si D_n es múltiplo de 2 y de 5. Ahora bien, como para todos los $n > 1$, la potencia 5^{n-1} es múltiplo de 5, el número natural D_n será múltiplo de 10 si y sólo si D_n es múltiplo de 2, pero esto equivale, por ser 2 primo y no dividir a ninguna potencia de 5, a que $3n+5$ sea múltiplo de 2, es decir, a que sea

$$3n+5 \equiv 0 \pmod 2 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \equiv 0 \pmod 2 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \text{ es par} \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ es impar}.$$

En resumen, D_n será múltiplo de 10 si y sólo si n es un número natural impar mayor que 1.