Academia DEIMOS
Oposiciones: a) Matemáticas Secundaria.
b) Diplomados en Estadística del Estado.
☎ 669 31 64 06
MADRID
www.academiadeimos.es
http://academiadeimos.blogspot.com.es
academia@academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

Examen Madrid 23 de Junio de 2018

1. Dado $x \in \mathbb{R}$ y el determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n} \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n$.

Este problema figura resuelto en la página 197 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos y ha sido resuelto este curso en clase en los grupos iniciales de alumnos de la Academia Deimos (problema 3, documento A2)

Solución: Desarrollando el determinante por los elementos de la última fila se deduce que, para cada $n \geq 2$, es

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}x^{n-1} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n} \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n-1} \\ x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1}x^{n-1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} + \frac{x^{n-1}}{n!}$$

es decir,

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Por tanto, si se reescribe la anterior igualdad para $n, n-1, \ldots, 3, 2$ y después se suman todas las igualdades obtenidas, se deduce:

$$\begin{cases} \Delta_n = \Delta_{n-1} + \frac{x^{n-1}}{n!} \\ \Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} + \frac{x^{n-2}}{(n-1)!} \\ \Delta_{n-2} = \Delta_{n-3} + \frac{x^{n-3}}{(n-2)!} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_2 = \Delta_1 + \frac{x}{2!} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_n = \Delta_1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!}$$

y como es $\Delta_1 = 1$, deducimos que para cada $n \geq 1$ es

$$\Delta_n = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Distinguimos para calcular el límite de la sucesión anterior:

- Si $x = 0$, entonces $\Delta_n = 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

- Si $x \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!}\right) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) - 1\right] = \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{x} \cdot (e^x - 1)$$

Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \frac{e^x - 1}{x}$$

2. La corona circular que forman dos circunferencias concéntricas Γ y Γ' de radios respectivos r y r' $(r < r')$ contiene a ocho circunferencias $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_8$ tales que

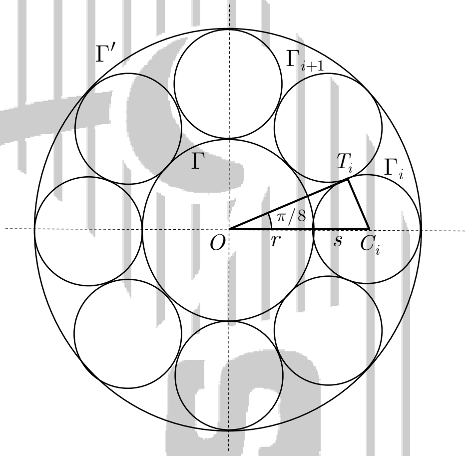
a) Γ_i es tangente a Γ y Γ', para cada $i = 1, \ldots, 8$.

b) Γ_i y Γ_{i+1} son tangentes, para cada $i = 1, 2, \ldots, 7$.

c) Γ_8 y Γ_1 son tangentes.

Determine el cociente $\dfrac{r'}{r}$.

Este problema figura resuelto en la página 129 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. Aparece también en la página 422 del volumen 1 y en la página 72 del volumen 2 de la misma colección.



Una solución: Llámese O al centro común de las circunferencias concéntricas, C_i al centro de la circunferencia Γ_i $(i = 1, \ldots, 8$, cualquiera) y T_i al punto de tangencia de Γ_i con Γ_{i+1}. El radio s de la circunferencia Γ_i cumple que $r + 2s = r'$, por lo que

$$s = \frac{r' - r}{2}$$

y por tanto,

$$C_iT_i = s = \frac{r' - r}{2}, \qquad OC_i = r + s = r + \frac{r' - r}{2} = \frac{r + r'}{2}$$

El triángulo OT_iC_i es rectángulo, pues la recta OT_i es tangente a la circunferencia Γ_i y por tanto perpendicular al radio C_iT_i de la misma. Como, además, ángulo $\measuredangle C_iOT_i$ es la dieciseisava parte de 2π, es decir, $\measuredangle C_iOT_i = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$, se deduce que

$$\operatorname{sen} \measuredangle C_iOT_i = \frac{C_iT_i}{OC_i},$$

o, llamando $k = \frac{r'}{r}$,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \frac{r' - r}{r' + r} = \frac{\frac{r'}{r} - 1}{\frac{r'}{r} + 1} = \frac{k - 1}{k + 1}$$

De aquí se sigue que:

$$k = \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}}$$

De las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad se sigue que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

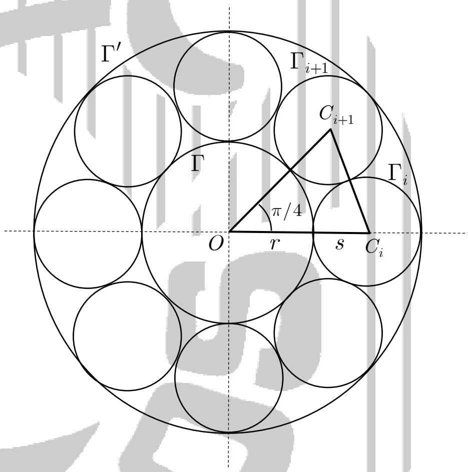
y por tanto

$$\frac{r'}{r} = k = \frac{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}} = \frac{1+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Otra solución: Si, con la misma nomenclatura de la primera solución, se aplica el teorema del coseno al triángulo OC_iC_{i+1}, se cumple que

$$(C_iC_{i+1})^2 = (OC_i)^2 + (OC_{i+1})^2 - 2\,OC_i \cdot OC_{i+1} \cdot \cos(\measuredangle C_iOC_{i+1})$$

Dado que $\measuredangle C_iOC_{i+1} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, $C_iC_{i+1} = 2s = r' - r$ y que $OC_i = OC_{i+1} = \frac{r+r'}{2}$, al sustituir en la igualdad anterior se obtiene:



$$(r'-r)^2 = 2\cdot\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

o bien,

$$(r'-r)^2 = (2-\sqrt{2})\cdot\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2$$

es decir,

$$r' - r = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,(r'+r)$$

Si se dividen los dos miembros de la última igualdad por r y, como antes, se llama $k = \frac{r'}{r}$, se obtiene:

$$k - 1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,(k+1)$$

y, despejando k,

$$\frac{r'}{r} = k = \frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

3. Dados los números reales positivos x e y, se pide:

a) Demuestre que $x^y < y^x$ cuando $x < y < e$.

b) Demuestre que $x^y > y^x$ cuando $e < x < y$.

Solución: La función logaritmo neperiano L es estrictamente creciente en el intervalo $(0,+\infty)$, luego si x e y son números reales positivos, las siguientes desigualdades son todas equivalentes:

$$x^y < y^x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}(x^y) < \mathrm{L}(y^x) \quad \Leftrightarrow \quad y\,\mathrm{L}\,x < x\,\mathrm{L}\,y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{L}\,x}{x} < \frac{\mathrm{L}\,y}{y},$$

Por tanto, lo que debe demostrarse es que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(t)=\frac{\mathrm{L}\,t}{t}$$

es: a) estrictamente creciente en el intervalo $(0,e)$, y b) estrictamente decreciente en el intervalo $(e,+\infty)$. Dado que f es derivable en cada $t>0$ y que

$$f'(t)=\frac{1-\mathrm{L}\,t}{t^2}$$

la derivada de f sólo se anula cuando $\mathrm{L}\,t=1$, es decir, cuando $t=e$, y es inmediato que $f'(t)>0$ cuando $0<t<e$ y que $f'(t)<0$ cuando $t>e$, por lo que f es estrictamente creciente en el intervalo $(0,e)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(e,+\infty)$, que es lo que había que demostrar.

4. En una de las mesas de un casino se juega a los dados como sigue: El jugador realizará sucesivos lanzamientos de dos dados equilibrados hasta que la suma de los resultados de ambos sea 4 o 7. Si sale 4, habrá ganado; si sale 7, habrá perdido. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el jugador?

Una solución: En cualquier tirada de los dos dados, de los $6^2 = 36$ casos posibles hay 3 casos favorables a "*suma* 4", a saber, $(1,3),(2,2),(3,1)$; hay 6 casos favorables a "*suma* 7": $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ y, en consecuencia, hay $36-(3+6)=27$ casos en los que la *suma no es ni* 4 *ni* 7.

El jugador ganará en el lanzamiento n-ésimo $(n = 1,2,3,\ldots)$ si y sólo si no ha obtenido suma 4 ni suma 7 en ninguna de las $n-1$ primeras partidas y ha obtenido suma 4 en la n-ésima. La probabilidad p_n de que el jugador gane el juego en la tirada n-ésima es por tanto, atendiendo a lo escrito en el primer párrafo:

$$p_n = \left(\frac{27}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{36} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{12}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Dado que si el jugador gana, debe hacerlo en alguna de las tiradas, la probabilidad p de que gane el jugador es

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{12} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

OBSERVACIÓN: La probabilidad de que el juego no termine nunca es la probabilidad de que en ninguna de las sucesivas tiradas de los dos dados se obtenga suma 4 o suma 7, y que es

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdots = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Por tanto, el juego termina tarde o temprano y, en consecuencia, la probabilidad de que el jugador pierda es

$$1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Otra solución: Llámese p a la probabilidad de que gane el jugador. Si en el primer lanzamiento de los dos dados se obtiene *suma* 4, cosa que ocurre con probabilidad $\frac{3}{36}$, el jugador gana con probabilidad 1; si se obtiene *suma* 7, suceso con probabilidad $\frac{6}{36}$, el jugador gana con probabilidad 0, mientras que si se obtiene *suma distinta de* 4 *y de* 7, cuya probabilidad es $\frac{27}{36}$, el jugador gana con la misma probabilidad p que tenía antes del primer lanzamiento, es decir, de acuerdo con el *teorema de la probabilidad total*, será

$$p = \frac{3}{36} \cdot 1 + \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{27}{36} \cdot p$$

o bien, $36p = 3 + 27p$ y por tanto

$$p = \frac{1}{3}$$