Braulio de Diego Martín
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria (excedente).
Profesor Titular de Escuela Universitaria. Universidad de Alcalá de Henares.

Francisco José Baena Muñoz
Profesor de Enseñanza Secundaria.

Agustín Llerena Achútegui
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad de Alcalá de Henares.

María Belén Rodríguez Rodríguez
Profesora de Enseñanza Secundaria.

José Manuel Gamboa Mutuberría
Catedrático de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid.

José María Lorenzo Magán
Profesor de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad Complutense de Madrid.

Bruno Salgueiro Fanego
Profesor de Enseñanza Secundaria.

PROBLEMAS DE OPOSICIONES

MATEMÁTICAS

Tomo 6

(2014)

Preparación del ejercicio práctico de las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria

© Los autores
© Editorial Deimos
Glorieta del Puente de Segovia, 3
28011 Madrid
Tel.: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

Reservados todos los derechos. Ni todo ni parte de este libro pueden reproducirse o transmitirse, utilizando medios electrónicos o mecánicos, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin permiso por escrito del editor.

I.S.B.N: 978-84-86379-32-2 (Obra completa)
I.S.B.N: 978-84-86379-87-2 (Tomo 6)
Depósito legal: M-28348-2014

Imprime: SERVICE POINT

Prólogo

Cada vez que finalizamos la redacción de un nuevo libro de problemas, una vez éste ya está lleno de cuanto quisimos y supimos escribir, la escritura del prólogo nos exige resumir en un par de páginas aquello que se encontrará el lector en las hojas sucesivas y las razones por las que escribimos lo que escribimos en la forma que lo escribimos.

Los autores de este libro, antes de empezar a escribir su primera página, no supieron si lo que entonces era apenas un proyecto llegaría a publicarse, si sería del agrado de quienes lo leyeran o si merecería la pena el esfuerzo que habría de invertirse en escribirlo. Nos sentiremos recompensados si aquéllos que invirtieron su dinero en la compra del libro, y tras prestarle su atención, llegan a la conclusión de que el libro fue barato y de que lo que se escapó del bolsillo volvió a la cabeza hecho conocimiento. Sólo entonces tendrá sentido el tiempo que dedicamos a la escritura del libro y los desvelos que padecimos buscando mejores soluciones a los problemas.

Dada la larga crisis que sufrimos, la corta esperanza de que ésta termine pronto y las menguadas economías de muchos de nuestros lectores, hemos decidido hacer un libro más pequeño y no esperar a recopilar los problemas que puedan ser convocados en sucesivas oposiciones. Publicamos así el sexto volumen de la colección *Problemas de Oposiciones a Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas*, en el que se resuelven los problemas propuestos en 2014 por los tribunales que han juzgado las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, en la especialidad de Matemáticas, en aquellas Comunidades Autónomas que tuvieron a bien convocarlas.

Los problemas, como es habitual en nuestros libros, están ordenados según la Comunidad en la que se propusieron. Además, tras el índice autonómico que sigue a este prólogo, el lector encontrará un índice temático al que podrá dirigirse cuando pretenda resolver problemas referentes a una misma área de las Matemáticas. Allí los encontrará clasificados en problemas de Álgebra, Geometría, Cálculo diferencial, Cálculo integral y Estadística y Probabilidad.

Algunos de los problemas que aparecen en el libro ya fueron propuestos en anteriores convocatorias y figuran resueltos en los volúmenes 1, 2, 3, 4 o 5 de la colección *Problemas de Oposiciones. Matemáticas* (véanse las Publicaciones del final del libro). Cuando se nos ha ocurrido una solución distinta de la incluida en algún volumen anterior, la hemos incluido; cuando no, remitimos al lector al volumen de los anteriores en el que figura resuelto el problema.

Hemos intentado, en los problemas que aparecen por primera vez, presentar más de una solución y, en muchos de ellos, hemos resuelto problemas más generales que el concreto que se proponía. Con ello, el lector no sólo aprenderá a resolver el problema particular que se propuso, sino que será capaz de dar solución a todo un tipo de problemas similares al que se planteó en el examen. Admitimos la posibilidad de que algún lector nos tache de pesados, pero anteponemos nuestro deseo de enseñar lo poco que sabemos a otro tipo de cuestiones estéticas. Sea consciente, por último, quien nos lee de que todo cuanto se escribió pasó el filtro de cada una de las diferentes sensibilidades matemáticas de los diversos profesores que escribieron este libro. Unos aportaron claridad, otros dieron con soluciones estupendas y algunos terminaron mareados de tanto visar y revisar problemas, pero todos pusieron lo mejor de sí mismos para que éste fuera un buen libro de problemas.

Madrid, Octubre 2014

LOS AUTORES

Índice de problemas por Comunidades Autónomas

Año 2014

Índice temático de problemas

Álgebra

Números, sucesiones y series

Cálculo diferencial

Cálculo integral

Geometría

Estadística y Probabilidad

Un par de problemas extraídos del volumen

Problema 14.15. (páginas 81 a 86)

Un segmento rectilíneo AB de longitud L se apoya sobre los semiejes coordenados positivos.

a) Determine el lugar geométrico de los puntos desde los que se ve el segmento AB bajo un ángulo de 30° cuando dicho segmento forma un triángulo isósceles en el primer cuadrante.

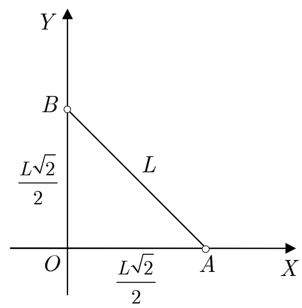
b) Si son $A(1,0)$ y $B(0,1)$, determine el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras que pasan por A, por B y por el origen de coordenadas.

(Madrid)

El apartado b) es el problema 04.4 del [Vol. 4] y también figura resuelto en la página 62 del [Vol. 2]

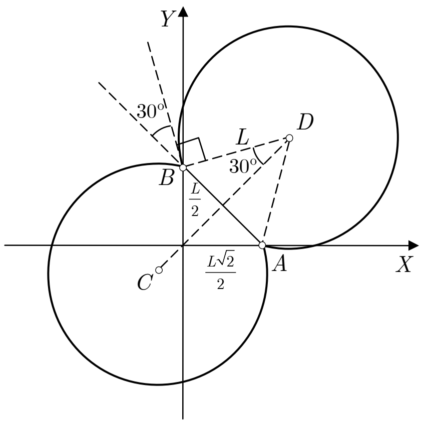
Solución:

a) El segmento AB de longitud L que se apoya en los semiejes positivos forma un triángulo isósceles en el primer cuadrante cuando $OA = OB$. Por el *Teorema de Pitágoras* será $OA^2 + OB^2 = L^2$, es decir, $2 \cdot OA^2 = L^2$, luego $OA = OB = \frac{L\sqrt{2}}{2}$.



Son entonces $A\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ y $B\left(0, \frac{L\sqrt{2}}{2}\right)$ y el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que se ve el segmento AB bajo un ángulo de 30° es, por definición, el arco capaz de 30° sobre el segmento AB.

Dicho arco capaz es la unión de dos arcos de circunferencia de extremos A y B (excluidos éstos), simétricos el uno del otro respecto del segmento AB y tales que la semirrecta tangente a cualquiera de ellos en los extremos A y B forma un ángulo de $180^{\circ} - 30^{\circ} = 150^{\circ}$ con el segmento AB.



Los centros de estos dos arcos de circunferencia son los puntos C y D situados en la mediatriz del segmento AB, que es la recta de ecuación $x = y$, y tales que $\measuredangle BDA = 2 \cdot 30^{\text{o}} = 60^{\text{o}}$. Por ello y por ser $\measuredangle ABD = \measuredangle DAB$, el triángulo ADB es equilátero, así es que los radios de las circunferencias miden $CA = DA = AB = L$.

Las coordenadas de los centros C y D, por estar éstos sobre la recta $x = y$, son de la forma (λ, λ), para ciertos $\lambda \in \mathbb{R}$ que hallamos como sigue:

$$L^2 = DB^2 = CB^2 = \lambda^2 + \left(\lambda - \frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\lambda^2 - \sqrt{2}L\lambda + \frac{L^2}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\lambda^2 - \sqrt{2}L\lambda - \frac{L^2}{2} = 0$$

y las soluciones de esta ecuación de segundo grado son

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}L \pm \sqrt{2L^2 + 4L^2}}{4} = \frac{\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{6}\right)L}{4}$$

Los centros C y D son, pues, $C\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}L, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}L\right)$ y $D\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}L, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}L\right)$.

b) En la ecuación general de una hipérbola equilátera, los coeficientes de x^2 e y^2 deben ser opuestos. Será de la forma:

$$ax^2 - ay^2 + 2bxy + 2cx + 2dy + e = 0$$

Como la hipérbola debe pasar por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, resultan $e = 0$, $a + 2c + e = 0$, $-a + 2d + e = 0$, es decir, $e = 0$, $2c = -a$, $2d = a$, y por tanto, la ecuación general de las hipérbolas equiláteras que pasan por O, A y B será:

$$ax^2 - ay^2 + 2bxy - ax + ay = 0$$

Obsérvese que deben ser $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Si fuese $a = 0$, la ecuación anterior se reduciría a $2bxy = 0$ y como no puede ser también $b = 0$, sería $xy = 0$, que no es una hipérbola sino la unión de los dos ejes coordenados. Si fuese $b = 0$, sería $a \neq 0$ y la ecuación se reduciría, tras dividir por a, a $x^2 - y^2 - x + y = 0$, o bien $(x - y)(x + y - 1) = 0$, que es la unión de dos rectas y no una hipérbola.

En base a ello, si dividimos por a en la ecuación de la hipérbola y llamamos $m = \frac{b}{a}$, nuestra ecuación quedará:

$$x^2 - y^2 + 2mxy - x + y = 0\,, \qquad \text{donde } m \neq 0$$

Las coordenadas del centro de la hipérbola $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2mxy - x + y = 0$ son la única solución del sistema lineal que se obtiene al anular las derivadas parciales de f. Por tanto, un punto (x,y) es del lugar $\mathcal{G}$ que se busca si y sólo si, para algún $m \neq 0$, es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}, \qquad \text{es decir,} \qquad \begin{cases} 2x + 2my - 1 = 0 \\ -2y + 2mx + 1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Sea $P(x,y)$ un punto del lugar $\mathcal{G}$ tal que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ e $y \neq \frac{1}{2}$. Entonces, para algún $m \neq 0$ será, según (1),

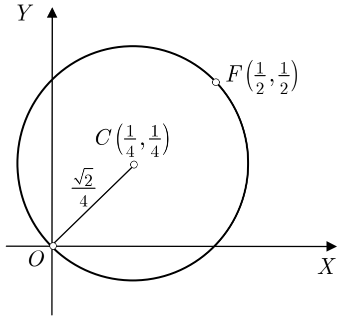
$$m = \frac{1-2x}{2y} = \frac{-1+2y}{2x} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - x + 2y^2 - y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 - \frac{1}{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

y de ello se sigue que P es un punto de la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $C\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Si alguna de las dos coordenadas x o y del punto $P \in \mathcal{G}$ fuese nula o igual a $\frac{1}{2}$, en virtud de (1) sólo podrían ser $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$ (para $m = 1$) ó $x = \frac{1}{2}$ e $y = 0$ (para $m = -1$), y ambos puntos, $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, también están en la circunferencia $\mathcal{C}$.

Si, recíprocamente, $P(x,y)$ es un punto de $\mathcal{C}$ cuyas dos coordenadas son no nulas y distintas de $\frac{1}{2}$, recorriendo el camino anterior en sentido contrario se concluye que (x,y) es solución de (1) para el valor no nulo $m = \frac{1-2x}{2y} = \frac{-1+2y}{2x}$ y que, por tanto, $P \in \mathcal{G}$. Si alguna de las dos coordenadas de P es nula o igual a $\frac{1}{2}$, entonces $P(0,0)$ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ o $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y sólo los dos últimos son puntos del lugar $\mathcal{G}$ por ser los únicos que son solución de (1) para algún $m \neq 0$.

En resumen, el lugar $\mathcal{G}$ buscado es la circunferencia de centro $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{4}$, salvo el origen $O(0,0)$ y el punto $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.



OBSERVACIÓN

Exponemos aquí un camino distinto para resolver el apartado b) a partir de (1), es decir, conociendo que un punto (x,y) es del lugar que se busca si y sólo si, para algún $m \neq 0$, es

$$\begin{cases} 2x+2my-1=0 \\ -2y+2mx+1=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Al resolver el sistema (1) deducimos que son

$$x=\frac{1-m}{2\left(1+m^2\right)}, \qquad y=\frac{1+m}{2\left(1+m^2\right)}$$

Entonces:

$$x+y=\frac{1-m}{2\left(1+m^2\right)}+\frac{1+m}{2\left(1+m^2\right)}=\frac{2}{2\left(1+m^2\right)}=\frac{1}{1+m^2}$$

$$x^2+y^2=\frac{(1-m)^2}{4\left(1+m^2\right)^2}+\frac{(1+m)^2}{4\left(1+m^2\right)^2}=\frac{2\left(1+m^2\right)}{4\left(1+m^2\right)^2}=\frac{1}{2\left(1+m^2\right)}$$

y por tanto, $2x^2+2y^2=x+y$, es decir,

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$$

Observe que además debe ser $x \neq y$, pues si fuese $x=y$, para algún $m \neq 0$ sería $1-m=1+m$, es decir, $m=0$, lo que es imposible. Los únicos puntos (x,y) de la circunferencia anterior tales que $x=y$ son los que cumplen

$$2x^2+2x^2-x-x=0 \quad \Rightarrow \quad x(2x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \ \text{ o } \ x=\frac{1}{2}$$

es decir, son los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, por lo que el lugar buscado está contenido en la circunferencia exceptuando los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Recíprocamente, si se procede de forma idéntica a como se hizo en la solución, se obtendrá que cada punto de la circunferencia, con excepción de $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, cumple (1) y que, en consecuencia, es el centro de alguna hipérbola equilátera que pasa por los puntos A, B y O.

Problema 14.1. Páginas 3 a 7.

Determine una función continua $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ tal que $f(1)=1$, $f(2)=7$ y tal que para cada $x\in[0,2]$ sea

$$3\int_0^x f(t)\,dt=[f(x)+2f(0)]\,x$$

(Aragón. Opción A)

Un problema muy similar a éste es el 05.32 del volumen 4.

Primera solución:

La función f es continua en el intervalo $[0,2]$ y, consecuencia de ello y del *Teorema fundamental del Cálculo*, la función $x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$ es derivable en cada $x\in[0,2]$, siendo

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=f(x)$$

Si en la igualdad del enunciado despejamos $f(x)$, resulta que para todos los $x\in(0,2]$ es

$$f(x)=\frac{3}{x}\int_0^x f(t)\,dt-2f(0)$$

y de las propiedades aritméticas de la derivada se deduce que f es derivable en el intervalo $(0,2]$. Puede por tanto derivarse en la igualdad del enunciado para cada $x\in(0,2]$, obteniendo que

$$3f(x)=x\,f'(x)+f(x)+2f(0)$$

es decir,

$$2[f(x)-f(0)]=x\,f'(x) \qquad (1)$$

o bien,

$$f'(x) = 2\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Esta última igualdad garantiza, por ser f derivable en $(0,2]$, que también f' es derivable en $(0,2]$. Derivando entonces en (1) se tiene, para cada $x \in (0,2]$, que

$$2f'(x) = f'(x) + x\,f''(x)$$

es decir,

$$f'(x) = x\,f''(x) \tag{2}$$

La última igualdad, cierta para todo $x \in (0,2]$, puede ser escrita en la forma

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{x}$$

Esta igualdad evidencia, por ser f' derivable en $(0,2]$, que también lo es f'', de modo que al derivar en (2) obtenemos:

$$f''(x) = f''(x) + x\,f'''(x)$$

o lo que es igual, $x\,f'''(x) = 0$, para cada $x \in (0,2]$. Por tanto, es $f'''(x) = 0$, para cada $x \in (0,2]$ y de ello se deduce que f'' es constante en el intervalo $(0,2]$, pongamos $f''(x) = c$. Sustituyendo en (2) se obtiene:

$$f'(x) = x\,f''(x) = cx$$

para cada $x \in (0,2]$ y, al sustituir en (1) deducimos que:

$$2\left[f(x) - f(0)\right] = cx^2$$

es decir,

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}cx^2 \tag{3}$$

para cada $x \in (0,2]$.

Como son $f(1)=1$ y $f(2)=7$, al sustituir en la igualdad anterior se deduce que

$$f(0)+\frac{c}{2}=1, \qquad f(0)+2c=7$$

Al restar ambas igualdades se obtiene que $\frac{3c}{2}=6$, es decir, $c=4$, y al sustituir en la segunda igualdad, $f(0)=-1$. Sustituyendo en (3) se tiene que $f(x)=-1+2x^2$, para cada $x\in(0,2]$ y como también $f(0)=-1=-1+2\cdot 0^2$, resulta que la función buscada es la función $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=-1+2x^2$$

Hasta aquí se ha probado que, caso de existir alguna función $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ que cumpla las condiciones del enunciado, dicha función es la definida por $f(x)=2x^2-1$. Sólo resta comprobar que esta función satisface efectivamente dichas condiciones, pero esto es cosa sencilla pues además de ser continua y cumplir $f(1)=1$ y $f(2)=7$, para cualquier $x\in[0,2]$ se tiene que:

$$3\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (6t^2-3)\,dt=\left[2t^3-3t\right]_0^x=2x^3-3x=x\left(2x^2-3\right)=$$

$$=x\left(2x^2-1-2\right)=x\left[f(x)+2f(0)\right]$$

Segunda solución:

Razonando como en los tres primeros párrafos de la solución anterior, se deduce que f es derivable en el intervalo $(0,2]$ y que para cada $x\in(0,2]$ es

$$x\,f'(x)-2f(x)=-2f(0)$$

o también, por ser $x>0$, que

$$f'(x)-\frac{2}{x}f(x)=-\frac{2f(0)}{x} \tag{4}$$

La restricción de f al intervalo $(0,2]$ es, por tanto, una solución en dicho intervalo de una ecuación diferencial lineal de primer orden cuyos coeficientes son las funciones

$$x \mapsto -\frac{2}{x}, \qquad x \mapsto -\frac{2f(0)}{x}$$

ambas continuas en el intervalo $(0,2]$.

Un factor integrante de dicha ecuación es $e^{\int \frac{-2}{x}dx}$, pues al multiplicar los dos miembros de (4) por dicho factor se obtiene:

$$e^{\int \frac{-2}{x}dx} \cdot f'(x) - e^{\int \frac{-2}{x}dx} \cdot \frac{2}{x} \cdot f(x) = e^{\int \frac{-2}{x}dx} \cdot \frac{-2f(0)}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot e^{\int \frac{-2}{x}dx}\right) = \frac{-2f(0)}{x} \cdot e^{\int \frac{-2}{x}dx} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(f(x) e^{-2\,\mathrm{L}\,x}\right) = \frac{-2f(0)}{x} \cdot e^{-2\,\mathrm{L}\,x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right) = \frac{-2f(0)}{x^3}$$

Al integrar se deduce que, para cada $x \in (0,2]$ y algún $k \in \mathbb{R}$, es

$$\frac{f(x)}{x^2} = -2f(0)\int x^{-3}dx = \frac{f(0)}{x^2} + k$$

es decir,

$$f(x) = f(0) + kx^2 \tag{5}$$

Como son $f(1) = 1$ y $f(2) = 7$, al sustituir en la igualdad anterior se deduce que

$$k + f(0) = 1, \qquad 4k + f(0) = 7$$

sistema de ecuaciones cuya solución es $k = 2$ y $f(0) = -1$. Sustituyendo en (5) se tiene que $f(x) = 2x^2 - 1$, para cada $x \in (0,2]$, igualdad que también se cumple para $x = 0$, por lo que la función buscada es la función $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 1$. La comprobación de que, recíprocamente, esta función f cumple las condiciones del enunciado ya se hizo en el último párrafo de la primera solución y en buena lógica no la repetiremos.

PUBLICACIONES

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 1: 1969 a 1980. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Tercera edición. I.S.B.N. 978-84-86379-33-9.
  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.
  Obra dedicada a la resolución, con todo detalle, de los 509 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 592 pág., ofreciéndose dos métodos de resolución cuando se ha considerado oportuno.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 2: 1981 a 1987. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. I.S.B.N. 978-84-86379-36-0.
  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.
  Contiene, en 768 páginas, 773 problemas totalmente[1] resueltos que fueron propuestos en las citadas oposiciones, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 3: 1988 a 1995. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. I.S.B.N. 978-84-86379-34-6.
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena y Mariano Llerena.
  Contiene totalmente[1] resueltos 551 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 672 pág., convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 4: 1996 a 2005. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. I.S.B.N. 978-84-86379-86-5.
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa y José Mª Lorenzo.
  Contiene totalmente[1] resueltos 378 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 1004 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 5: 2006 a 2012. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  I.S.B.N. 978-84-86379-85-8
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.
  Contiene totalmente[1] resueltos 177 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 650 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 6: 2014. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  I.S.B.N. 978-84-86379-87-2
  Autores: Braulio de Diego, Francisco Baena, Agustín Llerena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.
  Contiene totalmente[1] resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 168 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

---

[1] Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

- **TEMAS DE OPOSICIONES A PROFESOR DE ENSEÑANZA SECUNDARIA. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-48-3. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-47-6. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-49-0.
  Autores: Braulio de Diego, Francisco Padilla y Agustín Llerena.
  Obra de 3 volúmenes en la que se desarrollan todos los temas del Temario de Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, especialidad de Matemáticas

- **PROGRAMACIONES Y UNIDADES DIDÁCTICAS. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-74-2. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-75-9. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-76-6. Tomo 4, 978-84-86379-77-3.
  Autores: Fernando García, Antonio J. López, Manuel López, José Mª Lorenzo, Jorge Quereda, Manuela Redondo y Mª Teresa Sánchez
  Figuran desarrolladas las programaciones de las asignaturas de Matemáticas de 1º y 2º de E.S.O. en el Tomo 1; 3º y 4º (Opciones A y B) de E.S.O. en el Tomo 2; las Matemáticas I y II del Bachillerato de Ciencias y Tecnología en el Tomo 3; y las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II en el Tomo 4. Además, con cada programación se desarrollan al menos quince unidades didácticas.

- **PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL. Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.**
  Cuarta edición. I.S.B.N. 978-84-86379-00-1.
  Autores: Braulio de Diego, Elías J. Gordillo y Gerardo Valeiras.
  Obra dirigida por José Luis Vicente Córdoba (Catedrático de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla). Contiene 427 problemas totalmente resueltos y más de 848 cuestiones. Cada capítulo se inicia con un resumen teórico.
  Capítulo 1: Matrices. Operaciones elementales. Determinantes. Matriz inversa. Rango o característica de una matriz. Sistemas de ecuaciones lineales: método de reducción de Gauss. Capítulo 2: Espacios vectoriales. Subespacios. Dependencia lineal. Espacio cociente. Base y dimensión. Coordenadas. Cambio de base. Escalonamiento de vectores. Aplicaciones del Teorema de Rouché-Fröbenius. Capítulo 3: Aplicaciones lineales. Núcleo e imagen. Matrices asociadas a una aplicación lineal. Formas lineales. Espacio dual. Capítulo 4: Autovectores y autovalores. Polinomios característico y mínimo. Matrices diagonalizables. Diagonalización de matrices simétricas reales. Formas canónicas de Jordan: métodos de la partición de multiplicidades y de los divisores elementales. Aplicaciones.

- **EJERCICIOS DE ANÁLISIS (CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL). Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.**
  Quinta edición. I.S.B.N. 978-84-86379-02-5.
  Autor: Braulio de Diego.
  Capítulo 1: Interpolación. Capítulo 2: Sucesiones y topología en la recta real. Límites. Capítulo 3: Números complejos. Transformaciones. Capítulo 4: Límites y continuidad de funciones reales de variable real. Capítulo 5: Derivada y diferencial.
  Capítulo 6: Teoremas del valor medio. Regla de L'Hôpital. Fórmulas de Taylor y Mac Laurin. Curvas. Capítulo 7: Cálculo de primitivas. Integral definida. Integrales impropias. Convergencia. Capítulo 8: Series numéricas. Sucesiones y series funcionales. Convergencia uniforme. Desarrollos en series de potencias. Capítulo 9: Ecuaciones algebraicas. Aproximación de raíces. Eliminación de incógnitas.

Distribución y pedidos a:

Editorial DEIMOS
Glorieta del Puente de Segovia, n.º 3
28011 MADRID
Teléfonos: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es **editorial@academiadeimos.es**