Francisco José Baena Muñoz
Profesor de Enseñanza Secundaria.

José Manuel Gamboa Mutuberría
Catedrático de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid.

Braulio de Diego Martín
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria (excedente).
Profesor Titular de Escuela Universitaria. Universidad de Alcalá de Henares.

Agustín Llerena Achútegui
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad de Alcalá de Henares.

María Belén Rodríguez Rodríguez
Profesora de Enseñanza Secundaria.

José María Lorenzo Magán
Profesor de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad Complutense de Madrid.

Bruno Salgueiro Fanego
Profesor de Enseñanza Secundaria.

PROBLEMAS DE OPOSICIONES

MATEMÁTICAS

Tomo 7
(2015)

DEIMOS

Preparación del ejercicio práctico de las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria

Glorieta del Puente de Segovia, 3
28011 Madrid
Tel.: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

I.S.B.N: 978-84-86379-91-9 (Tomo 7)
Depósito legal: M-34002-2015

Imprime: SERVICE POINT

Prólogo

Fieles al compromiso de publicación anual que contrajimos el año pasado, presentamos el volumen 7 de la colección *Problemas de Oposiciones de Matemáticas* que Editorial Deimos publica desde hace casi cuatro décadas. Se resuelven en él los problemas propuestos en las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria celebradas en Junio de 2015 en las Comunidades Autónomas de Extremadura, Madrid, Castilla y León, La Rioja, Castilla-La Mancha y Comunidad Valenciana.

Hasta hace un año, Deimos publicaba un nuevo volumen de Problemas cada seis o siete años que recogía los problemas de las Oposiciones celebradas en todo el país en ese período de tiempo. El gran número de problemas a resolver nos obligaba a escribir las soluciones de modo esquemático para no convertir los libros en entes inabarcables – alguno ya lo es – y, en consecuencia, caros.

Desde hace un año, Deimos ha decidido publicar un volumen anual con los problemas propuestos ese año en las distintas Comunidades. Han resultado así libros –el volumen 6 publicado en 2014 y el volumen 7 que ahora se presenta– más manejables y, lógicamente, más baratos en los que hemos escrito todo cuanto hemos querido decir sobre cada problema, permitiéndonos detallar sus soluciones tanto como hemos creído necesario.

A pesar de los cuarenta años transcurridos desde que se redactaron las primeras soluciones a los problemas de oposiciones, y a pesar de que algunos de los autores actuales no son los originales, en todos los libros de la colección es denominador común el respeto por las Matemáticas y por quienes nos leen. El respeto por las Matemáticas nos obliga a ser precisos en la escritura de las soluciones y nos lleva incluso en ocasiones a modificar ligeramente los enunciados propuestos en el examen de la oposición para desproveerlos de cualquier ambigüedad que provoque desconcierto en quien debe resolverlos.

Por su parte, el respeto a quien nos lee y, en especial, a quien nos lee para ser examinado, nos impone escribir lo que contamos de la forma más clara en que sabemos contarlo. Si aun así no lo hemos logrado, esperamos de usted, querido lector, que nos lo repruebe para que intentemos hacerlo mejor.

Esa aspiración a que cada volumen mejore al anterior nos ha llevado a escribir varias soluciones de casi todos los problemas del libro, además de una cantidad ingente de observaciones en las que se resuelven variantes del problema en cuestión o generalizaciones del mismo. Ello permite al lector no sólo aprender la resolución del problema concreto que fue propuesto en la oposición, sino la de toda una clase de problemas que tienen relación con el mismo y que pueden ser resueltos con argumentos similares a los utilizados en las soluciones que se presentan.

Además de las abundantes observaciones sobre los problemas que salpican el libro, tras cada uno se enuncian y se demuestran aquellos resultados o propiedades menos conocidos que han sido aplicados en la resolución del problema. El lector no tendrá así que buscar en otro libro la información que necesita para resolver los distintos problemas y, de paso, recordará conceptos o procedimientos empleados muy frecuentemente en la resolución de problemas propuestos en oposiciones anteriores, entre ellos, las integrales eulerianas gamma y betha, el teorema de la bisectriz, la razón simple, la fórmula de Moivre, el dibujo de curvas en coordenadas polares, el Principio de Reflexión para las caminatas al azar, la transformación de Tschirnhaus para resolver ecuaciones polinómicas, el estudio de algunos tipos de sucesiones recurrentes simples o el problema de la paradoja de Bertrand.

Las soluciones que se han escrito de problemas ya resueltos en volúmenes anteriores son distintas a las que allí se propusieron, bien porque siguen vías diferentes hacia la solución, bien porque se ha resuelto alguna generalización del problema con la que, huelga decirlo, se aprende considerablemente más que con el caso particular propuesto en la oposición. Tan sólo hemos dejado de dar una nueva solución al problema 15.16. Coincide con el 09.12 del volumen 5 y en nuestra opinión el procedimiento allí expuesto no deja sitio para nuevas explicaciones.

Nosotros ya no diremos más y será el libro a partir de ahora el que diga por nosotros. La recompensa de haberlo escrito sólo nos llegará si es de utilidad a todos cuantos han de leerlo, sea cual sea la razón que les acerque a él.

Antes de dejar paso a las Matemáticas, subrayamos nuestro agradecimiento a quienes aportaron sus ideas para mejorar el libro, a quienes desecharon las nuestras, a los que nos permiten publicarlo y a los que padecerán su lectura. Entre los que ya la han padecido está Juan Manuel Hernández Rubio, al que agradecemos en especial su altruista colaboración, y entre quienes más agradecimiento merecen, nuestras familias, que han soportado con buen ánimo las ausencias que el pensamiento nos impone.

Madrid, Octubre 2015

LOS AUTORES

Índice de problemas por Comunidades Autónomas

Año 2015

Índice temático de problemas

Álgebra

Números y sucesiones

Cálculo diferencial

Cálculo integral

Geometría

Combinatoria y Probabilidad

Un par de problemas extraídos del volumen

15.2 (Páginas 6 a 8). Un profesor de Educación Secundaria quiere poner el siguiente ejercicio a sus alumnos:

Un depósito posee dos grifos de llenado; uno de ellos llena el depósito en a minutos y el otro, independiente del anterior, lo llena en b minutos. ¿Cuántos minutos se tarda en llenar el depósito si se abren los dos grifos a la vez?

a) Para que resulte sencillo, el profesor elige a, b y la solución c entre los números naturales. ¿Qué valores pueden tomar a y b en función de c?

b) Utilice el apartado anterior para encontrar todas las soluciones (a,b) del problema, con $a,b \in \mathbb{N}$, para $c = 6$.

(Extremadura)

Solución:

a) El primer grifo, en un minuto, llena la fracción $\frac{1}{a}$ del depósito. El segundo grifo, también en un minuto, llena la fracción $\frac{1}{b}$ del depósito, luego si se abren los dos simultáneamente, llenarán en un minuto la fracción $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ del depósito. Si los dos grifos abiertos a la vez tardan c minutos en llenar el depósito, en un minuto llenan la fracción $\frac{1}{c}$ del depósito, luego

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \tag{1}$$

Si de la ecuación diofántica anterior despejamos b, se obtiene, recordando que es $a > c$:

$$b=\frac{ac}{a-c}=\frac{ac-c^2+c^2}{a-c}=\frac{c(a-c)}{a-c}+\frac{c^2}{a-c}=c+\frac{c^2}{a-c} \tag{2}$$

Dado que b y c son números naturales y que $b > c$, de la igualdad entre el primer y el último miembro de (2) se deduce que el número $\frac{c^2}{a-c}$ es también natural, luego $a-c$ debe ser divisor natural de c^2, es decir, $a-c=d$, o bien, $a=c+d$, donde d es divisor natural de c^2. Al sustituir en la igualdad (2) se obtiene $b=c+\frac{c^2}{d}$.

Se ha probado así que cualquier terna (a, b, c) de números naturales solución de la ecuación (1) cumple las condiciones

$$a = c + d\,, \qquad b = c + \frac{c^2}{d}$$

donde d es algún divisor natural de c^2.

Recíprocamente, cualquier terna (a, b, c) de números naturales en la que $a = c + d$ y $b = c + \frac{c^2}{d}$, donde d es un divisor natural de c^2, es solución de la ecuación diofántica (1). Esto es así porque

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c+d} + \frac{1}{c + \frac{c^2}{d}} = \frac{1}{c+d} + \frac{d}{c(c+d)} = \frac{c+d}{c(c+d)} = \frac{1}{c}\,.$$

Por tanto, la terna (a, b, c) de números naturales es solución del problema si y sólo si

$$a = c + d\,, \qquad b = c + \frac{c^2}{d}$$

donde d es cualquier divisor natural de c^2.

b) Si $c = 6$, del apartado anterior se deduce que sólo son soluciones del problema los pares (a, b) de números naturales tales que

$$a = 6 + d\,, \qquad b = 6 + \frac{36}{d}$$

donde d es cualquier divisor natural de $6^2 = 36$. Los divisores naturales de 36 son los $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, por lo que las soluciones al problema en este caso son:

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = 42 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 8 \\ b = 24 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 9 \\ b = 18 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 10 \\ b = 15 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 12 \\ b = 12 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 10 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 18 \\ b = 9 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 24 \\ b = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 42 \\ b = 7 \end{cases}.$$

15.10 (Páginas 107 a 111). Halle la parte entera de la suma

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

(Castilla y León)

Este problema figura resuelto tanto en la página 251 del volumen 1 de Problemas de Oposiciones, como en los problemas 00.44 del volumen 4 y el 06.7 del volumen 5, de maneras diferentes a la que aquí se propone.

Solución:

Acotaremos la suma

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}}$$

donde $N \in \mathbb{N}$ es cualquiera y luego estudiaremos el caso particular $N = 10^6$. Si se aplica el *teorema de los incrementos finitos* a la función $f(x) = 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[k, k+1]$, donde $k \in \mathbb{N}$ es cualquiera, se concluye que existe algún $c_k \in (k, k+1)$ tal que

$$f(k+1) - f(k) = f'(c_k)$$

esto es,

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{c_k}}.$$

Como es $k < c_k < k+1$, entonces $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{c_k}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (1)$$

Si se suman miembro a miembro todas las desigualdades de la izquierda desde $k = 1$ hasta $k = N - 1$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2 \cdot \sum_{k=1}^{N-1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

es decir, $s - 1 < 2(\sqrt{N} - 1)$, o lo que es equivalente, $s < 2\sqrt{N} - 1$.

Si ahora se suman miembro a miembro todas las desigualdades de la derecha de (1) desde $k = 1$ hasta $k = N$ se obtiene

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{N} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

es decir, $2\,(\sqrt{N+1} - 1) < s$. Al unir las dos desigualdades deducidas se tiene:

$$2\sqrt{N+1} - 2 < s < 2\sqrt{N} - 1 \tag{2}$$

En particular, si $N = 10^6$, entonces

$$2\sqrt{10^6 + 1} - 2 < s < 2 \cdot \sqrt{10^6} - 1$$

y, dado que $2\sqrt{10^6 + 1} - 2 > 2\sqrt{10^6} - 2 = 2 \cdot 10^3 - 2$, de la desigualdad anterior se desprende que

$$2 \cdot 10^3 - 2 < s < 2 \cdot 10^3 - 1 , \qquad \text{es decir,} \qquad 1998 < s < 1999$$

y, en consecuencia, la parte entera de s es $[s] = 1998$.

OBSERVACIONES

La acotación (2) obtenida para la suma

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}}$$

donde $N \in \mathbb{N}$ es cualquiera, no permite determinar de manera única la parte entera de s en todos los casos, aunque es verdad que, cuando no lo hace, deja el problema reducido a la decisión entre dos números naturales. Obsérvese que como la diferencia entre la cota superior y la cota inferior de s obtenida en (2) es

$$(2\sqrt{N} - 1) - (2\sqrt{N+1} - 2) = 1 - 2\,(\sqrt{N+1} - \sqrt{N}) < 1 ,$$

la parte entera de s sólo puede ser

$$[s] = \left[2\sqrt{N+1} - 2\right] \qquad \text{o} \qquad [s] = \left[2\sqrt{N} - 1\right].$$

PUBLICACIONES

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 1: 1969 a 1980.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  TERCERA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-33-9.
  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.

  Obra dedicada a la resolución, con todo detalle, de los 509 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 592 pág., ofreciéndose dos métodos de resolución cuando se ha considerado oportuno.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 2: 1981 a 1987.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  TERCERA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-89-6.
  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.

  Contiene, en 768 páginas, 773 problemas totalmente[1] resueltos que fueron propuestos en las citadas oposiciones, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 3: 1988 a 1995.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-34-6.
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena y Mariano Llerena.

  Contiene totalmente[1] resueltos 551 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 672 pág., convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 4: 1996 a 2005.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-86-5.
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa y José Mª Lorenzo.

  Contiene totalmente[1] resueltos 378 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 1004 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 5: 2006 a 2012.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-88-9
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.

---

[1] Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

Contiene totalmente[1] resueltos 177 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 656 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 6: 2014.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  I.S.B.N. 978-84-86379-87-2
  Autores: Braulio de Diego, Francisco Baena, Agustín Llerena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente[1] resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 168 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 7: 2015.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  I.S.B.N. 978-84-86379-91-9
  Autores: Francisco Baena, José Manuel Gamboa, Braulio de Diego, Agustín Llerena, Mª Belén Rodríguez, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.

  Contiene totalmente[1] resueltos los problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 238 páginas, convocadas por las diferentes Autonomías

- **TEMAS DE OPOSICIONES A PROFESOR DE ENSEÑANZA SECUNDARIA.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  SEGUNDA EDICIÓN. Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-48-3. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-47-6. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-49-0.
  Autores: Braulio de Diego, Francisco Padilla y Agustín Llerena.

  Obra de 3 volúmenes en la que se desarrollan todos los temas del Temario de Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, especialidad de Matemáticas

- **PROGRAMACIONES Y UNIDADES DIDÁCTICAS.**
  Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.
  Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-74-2. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-75-9. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-76-6. Tomo 4, 978-84-86379-77-3.
  Autores: Fernando García, Antonio J. López, Manuel López, José Mª Lorenzo, Jorge Quereda, Manuela Redondo y Mª Teresa Sánchez

  Figuran desarrolladas las programaciones de las asignaturas de Matemáticas de 1º y 2º de E.S.O. en el Tomo 1; 3º y 4º (Opciones A y B) de E.S.O. en el Tomo 2; las Matemáticas I y II del Bachillerato de Ciencias y Tecnología en el Tomo 3; y las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II en el Tomo 4. Además, con cada programación se desarrollan al menos quince unidades didácticas.

---

[1] Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

- **PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL.**
  Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.
  CUARTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-00-1.
  Autores: Braulio de Diego, Elías J. Gordillo y Gerardo Valeiras.

  Obra dirigida por José Luis Vicente Córdoba (Catedrático de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla). Contiene 427 problemas totalmente resueltos y más de 848 cuestiones. Cada capítulo se inicia con un resumen teórico.
  Capítulo 1: Matrices. Operaciones elementales. Determinantes. Matriz inversa. Rango o característica de una matriz. Sistemas de ecuaciones lineales: método de reducción de Gauss. Capítulo 2: Espacios vectoriales. Subespacios. Dependencia lineal. Espacio cociente. Base y dimensión. Coordenadas. Cambio de base. Escalonamiento de vectores. Aplicaciones del Teorema de Rouché-Fröbenius. Capítulo 3: Aplicaciones lineales. Núcleo e imagen. Matrices asociadas a una aplicación lineal. Formas lineales. Espacio dual. Capítulo 4: Autovectores y autovalores. Polinomios característico y mínimo. Matrices diagonalizables. Diagonalización de matrices simétricas reales. Formas canónicas de Jordan: métodos de la partición de multiplicidades y de los divisores elementales. Aplicaciones.

- **EJERCICIOS DE ANÁLISIS (CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL). Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.**
  QUINTA EDICIÓN. I.S.B.N. 978-84-86379-02-5.
  Autor: Braulio de Diego.

  Capítulo 1: Interpolación. Capítulo 2: Sucesiones y topología en la recta real. Límites. Capítulo 3: Números complejos. Transformaciones. Capítulo 4: Límites y continuidad de funciones reales de variable real. Capítulo 5: Derivada y diferencial.
  Capítulo 6: Teoremas del valor medio. Regla de L'Hôpital. Fórmulas de Taylor y Mac Laurin. Curvas. Capítulo 7: Cálculo de primitivas. Integral definida. Integrales impropias. Convergencia. Capítulo 8: Series numéricas. Sucesiones y series funcionales. Convergencia uniforme. Desarrollos en series de potencias. Capítulo 9: Ecuaciones algebraicas. Aproximación de raíces. Eliminación de incógnitas.

Distribución y pedidos a:

Editorial DEIMOS
Glorieta del Puente de Segovia, n.º 3
28011 MADRID
Teléfonos: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es
