Academia DEIMOS
Oposiciones: a) Secundaria.
b) Diplomados en
Estadística del Estado.
☎ 669 31 64 06
MADRID
www.academiadeimos.es
academia@academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

Exámen de acceso al cuerpo de Diplomados en Estadística del Estado.

2º ejercicio

09/06/2026

Academia DEIMOS
Oposiciones: a) Secundaria.
b) Diplomados en
Estadística del Estado.
☎ 669 31 64 06
MADRID
www.academiadeimos.es
http://academiadeimos.blogspot.com.es
academia@academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

OPOSICIONES AL CDEE. CONVOCATORIA 2025.
EJERCICIO 2.

ESTADÍSTICA TEÓRICA

1.- Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución de Weibull con parámetros $k > 0$ y $\lambda > 0$, denotado $X \sim \text{Weibull}(k, \lambda)$, si es una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), & \text{si } x > 0 \\ \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcule la función de distribución de X.

b) Calcule la mediana de X.

c) Para el caso $k = 1$, calcule la esperanza y la varianza de X.

d) Supongamos que tenemos un sistema compuesto por dos componentes C_1 y C_2 dispuestos en serie, de forma que el sistema falla cuando falla al menos uno de ellos. Si los tiempos de vida de C_1 y C_2 siguen distribuciones Weibull $(2, 2)$ y Weibull $(2, 4)$, respectivamente, demuestre que la función de distribución del tiempo de vida del sistema sigue de nuevo una distribución Weibull$(\ k, \lambda\ )$, e identifique los valores de k y λ.

Solución:

a) Dado que X es una v.a. continua, su función de distribución será

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

De este modo:

- $F(x) = 0$ si $x \leq 0$.
- $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right)\,dt = \left[-\exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right)\right]_0^x = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)$ si $x > 0$.

  Para llegar a este último resultado basta observar que

$$\int \frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right)\,dt = \int \frac{kt^{k-1}}{\lambda^k} \exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right)\,dt = -\exp\left(-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k\right)$$

  En resumen:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases}$$

b) Calcule la mediana de X.

Dado que esta variable es continua, igualamos la función de distribución a $\frac{1}{2}$ para obtener su mediana:

$$F(x) = \frac{1}{2} \implies 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) = \frac{1}{2} \implies \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) = \frac{1}{2}$$

Basta tomar logaritmos para despejar x:

$$-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \implies x = \lambda\sqrt[k]{\ln 2}$$

por lo que la mediana es:

$$\text{Me} = \lambda\sqrt[k]{\ln 2}$$

c) Para el caso $k = 1$, calcule la esperanza y la varianza de X.

Observemos que para $k = 1$, la función de densidad de la variable es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), & \text{si } x > 0 \\ \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

que corresponde con la función de densidad de una exponencial de parámetro o tasa $\frac{1}{\lambda}$, por lo que:

- Su media es: $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda$.
- Su varianza es: $V(X) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2}} = \lambda^2$.

d) Sean X_1 y X_2 los tiempos de vida de cada uno de estos componentes y T el tiempo transcurrido hasta que el sistema falle. Se verifica que

$$T = \min\{X_1, X_2\}$$

por lo que, para $t > 0$ se verifica que

$$P(T > t) = P(X_1 > t, X_2 > t)$$

Asumiendo que estas variables son independientes:

$$P(T > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t) = [1 - F_{X_1}(t)] \cdot [1 - F_{X_2}(t)]$$

Del apartado (a) sabemos que

- $F_{X_1}(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)$
- $F_{X_2}(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{4}\right)^2\right)$

por lo que

$$P(T > t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{t}{4}\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{5t^2}{16}\right) = \exp\left(-\left(\frac{t}{4/\sqrt{5}}\right)^2\right)$$

y la función de distribución de T será, por tanto

$$F_T(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{4/\sqrt{5}}\right)^2\right) \quad \text{para t>0}$$

De este modo, concluimos que

$$T \sim \text{Weibull}\left(k = 2, \lambda = \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

3.- El número de movimientos de una partida de ajedrez clásico se modela como una exponencial, con parámetro $\lambda > 0$; donde $1/\lambda$ es la duración media. La FIDE (Federación Internacional de Ajedrez) afirma que la duración media de una partida de élite es 60 movimientos. Un analista sospecha que las partidas son en realidad más cortas y recoge una muestra de $n = 10$ partidas:

$$x = \{38, 72, 55, 91, 44, 63, 80, 49, 67, 41\}$$

Con un nivel de significación $\alpha = 0,05$.

a) Encuentre el estimador máximo-verosímil de λ. ¿Es este estimador eficiente y suficiente?

b) Formule el contraste de hipótesis en términos de λ.

c) Sabiendo que $2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$, encuentre un estadístico para el contraste.

d) Realice el contraste de hipótesis. ¿Se rechaza la hipótesis nula?

e) Por el Teorema Central del Límite, para n suficientemente grande la media muestral $\bar{x}$ se distribuye aproximadamente como una normal. Sabiendo que la varianza poblacional es $\sigma^2 = 1/\lambda^2$, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media.

NOTA: Se proporcionan los siguientes valores que pueden ser de utilizad para la resolución de esta cuestión práctica.

$$\chi^2_{20;0,95} = 10,851; \chi^2_{10;0,95} = 3,94; \chi^2_{20;0,05} = 31,410;$$
$$\chi^2_{10;0,05} = 18,307; z_{0,025} = 1,96;$$

Solución:

a) Para una muestra aleatoria simple $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, la función de verosimilitud es:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Tomando logaritmos:

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Derivando respecto a λ e igualando a cero:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \implies \hat{\lambda}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Observemos también que

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

Dado que la media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{38 + 72 + 55 + 91 + 44 + 63 + 80 + 49 + 67 + 41}{10} = \frac{600}{10} = 60$$

el valor de la estimación es:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{60}$$

Para ver la suficiencia de este estimador, basta aplicar el *Teorema de Factorización de Fisher-Neyman*. Dado que la función de verosimilitud es:

$$L(\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n X_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{X}} = \lambda^n e^{-\lambda n/\hat{\lambda}_{MV}} \cdot 1$$

De modo que si $g\left(\hat{\lambda}_{MV}, \lambda\right) = \lambda^n e^{-\lambda n/\hat{\lambda}_{MV}}$ y $h(X_1, \ldots, X_n) = 1$ factorizamos la función de verosimilitud como:

$$L(\lambda) = g\left(\hat{\lambda}_{MV}, \lambda\right) \cdot h(X_1, \ldots, X_n)$$

por lo que el estimador es suficiente.

El estudio de su eficiencia no es inmediato. Si tomamos una muestra de tamaño $n = 1$, el estimador obtenido sería $\hat{\lambda}_{MV} = 1/X_1$, que carece de esperanza, ya que

$$E[\hat{\lambda}_{MV}] = E\left[\frac{1}{X}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{x} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \infty$$

por lo que no puede ser insesgado y, en consecuencia, tampoco será eficiente.

Para muestras de tamaño $n > 1$ se puede demostrar (a través de la distribución Gamma) que

$$E[\hat{\lambda}_{MV}] = E\left[\frac{1}{\bar{X}}\right] = \frac{n}{n-1}\lambda$$

lo que demuestra que el estimador es asintóticamente insesgado, que es una propiedad de los estimadores máximo verosímiles. También se puede demostrar que es asintóticamente eficiente.

b) El analista sospecha que las partidas son más cortas de lo que afirma la FIDE, es decir, que la duración media será menor que 60. Planteamos para este caso un contraste unilateral:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 60 & \text{(Afirmación de la FIDE)} \\ H_1 : \mu < 60 & \text{(Sospecha del analista)} \end{cases}$$

Como $\mu = \frac{1}{\lambda}$ este contraste es equivalente a éste:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda \leq \frac{1}{60} & \text{(Afirmación de la FIDE)} \\ H_1 : \lambda > \frac{1}{60} & \text{(Sospecha del analista)} \end{cases}$$

c) Dado que se nos dice que

$$2\lambda_0 \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{2n}$$

Sustituyendo el valor de los parámetros bajo H_0 ($\lambda_0 = \frac{1}{60}$ y $n = 10$), definimos el estadístico de contraste Y como:

$$Y = 2 \cdot \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \chi^2_{20}$$

d) Dado que $\sum x_i = 600$, el valor del estadístico será

$$Y_{\text{exp}} = \frac{600}{30} = 20$$

Como la hipótesis alternativa busca demostrar que las partidas son más cortas ($\mu < 60$), la región crítica se sitúa en la cola inferior de la distribución Chi-cuadrado, es decir:

$$\chi^2_{20;0,95} = 10{,}851$$

$$\text{Región Crítica: } RC = \{Y < \chi^2_{20;0,95}\} = \{Y < 10{,}851\}$$

Como $Y_{\text{exp}} = 20 \notin RC$, no hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula H_0. Se acepta la afirmación de la FIDE de que la duración media de las partidas de élite es de 60 movimientos.

e) Por el Teorema Central del Límite, para un tamaño muestral moderadamente grande, la media muestral se distribuye aproximadamente como una Normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Como sabemos que $\sigma = \mu = \frac{1}{\lambda}$, sustituyendo por su estimación muestral ($\hat{\sigma} = \bar{x} = 60$), el error estándar estimado es:

$$S_E = \frac{\bar{x}}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{10}} \approx 18{,}974$$

El intervalo de confianza será:

$$I_\mu = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}\,,\, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}\right]$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$I_\mu = [60 - 1{,}96 \cdot 18{,}974\,,\, 60 + 1{,}96 \cdot 18{,}974] = [22{,}811\,,\, 97{,}189]$$

Ejercicio 2 En un estudio estadístico se recogen datos de tres variables X, Y, Z. Se calculan las medias y los momentos centrales de orden 2, obteniendo los siguientes resultados:

$$\bar{x} = 200; \bar{y} = 300; \bar{z} = 100; S_{XX} = S_{YY} = S_{ZZ} = 25; S_{XY} = 6; S_{XZ} = 20; S_{YZ} = 15$$

a) Calcule la recta de regresión de Y sobre X.

b) Calcule el coeficiente de correlación. Interprete el resultado obtenido.

c) Calcule el coeficiente de determinación R^2. Interprete el resultado obtenido.

d) Se calcula el plano de regresión de Y sobre X, Z y se obtiene un coeficiente de determinación $R^2 = 0{,}52$. Calcule la varianza residual de esta regresión múltiple.

e) Calcule el coeficiente de correlación entre X y Z. A la vista de los resultados, ¿qué se puede decir sobre el modelo de regresión múltiple del apartado anterior?

f) Se calcula el coeficiente de correlación parcial $r_{XY.Z}$ de la regresión múltiple, obteniendo como resultado $r_{XY.Z} = -0{,}5$. Explique la interpretación de este resultado y su diferencia con el coeficiente obtenido en el apartado b).

Solución:

a) La pendiente de la recta de regresión viene dada por:

$$b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{6}{25} = 0{,}24.$$

Para calcular la ordenada en el origen tenemos en cuenta que la recta de regresión ha de pasar por el punto que forman las medias:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 300 - \frac{6}{25} \cdot 200 = 252.$$

Por tanto la recta de regresión es:

$$y = 252 + 0{,}24x.$$

b) El coeficiente de correlación es:

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}S_{YY}}} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

Indica que hay una correlación lineal positiva entre las variables X e Y con una intensidad baja ya que el valor absoluto es pequeño.

c) El coeficiente de determinación es:

$$R^2 = r_{XY}^2 = \frac{36}{625} = 0{,}24^2 = 0{,}0576$$

Este valor indica que un 5,76 % de la varianza de la variable Y viene explicada por la regresión lineal sobre la variable X.

d) La varianza residual de esta regresión múltiple viene dada por:

$$S_{Y,res}^2 = (1 - R^2)S_{YY} = (1 - 0{,}52) \cdot 25 = 0{,}48 \cdot 25 = 12.$$

e) El coeficiente de correlación es:

$$r_{XZ} = \frac{S_{XZ}}{\sqrt{S_{XX}S_{ZZ}}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Esto nos quiere decir que X y Z tienen una correlación importante y positiva, y posiblemente estén aportando información repetida en el modelo anterior al tratar de explicar Y. Por tanto en ese modelo de regresión múltiple presenta cierta colinealidad entre las variables.

f) Vemos que el signo de la correlación parcial entre X e Y cuando consideramos a Y es negativo, al contrario de lo que ocurría en la correlación lineal simple. Eso quiere decir que cuando tenemos en cuenta el efecto lineal que tiene la variable Z en ambas variables descubrimos que la relación se vuelve negativa. Es un caso habitual en el que al incluir una nueva variable resulta que la relación entre dos variables no es como pensábamos y de hecho se puede invertir. Además, de la varianza de Y que no se puede explicar a través de la regresión lineal sobre Z, la variable X explica un $25\,\% = (-0{,}5)^2 \cdot 100$.

Ejercicio 6 Un equipo de investigadores desea estimar el nivel medio de radiación beta emitido por los contenedores de residuos nucleares de un complejo. El complejo cuenta con $M = 25$ almacenes subterráneos, cada uno con $N = 15$ contenedores. Dado el elevado coste de acceso, se seleccionan aleatoriamente $m = 5$ almacenes sin reposición y se miden todos sus contenedores, obteniéndose los siguientes promedios de radiación (en mSv/h):

Almacén	Promedio de radiación beta (mSv/h)
1	0,47
2	0,55
3	0,49
4	0,51
5	0,48

a) Estime el nivel medio de radiación beta por contenedor en todo el complejo.

b) Calcule la varianza estimada del estimador anterior.

c) Sabiendo que el coeficiente de correlación intraconglomerados es $\delta = 1/14$, calcule la varianza que se obtendría con muestreo aleatorio simple del mismo tamaño.

d) ¿ Qué diseño resulta más eficiente en este caso? Justifíquelo.

Solución:

a) Estamos ante un caso de muestreo por conglomerados en una etapa, donde todos los conglomerados tienen el mismo tamaño y se seleccionan por muestreo aleatorio simple sin reposición. En este caso la estimación del nivel medio de radiación es:

$$\hat{\bar{X}}_{congl} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i}{m} = \frac{0{,}47 + 0{,}55 + 0{,}49 + 0{,}51 + 0{,}48}{5} = \frac{2{,}50}{5} = 0{,}5 \text{ (mSv/h)}.$$

b) En esta situación la estimación de la varianza del estimador anterior viene dado por:

$$\hat{V}(\hat{\bar{X}})_{congl} = \left(1 - \frac{m}{M}\right) \frac{\hat{S}_b^2}{m},$$

donde:

$$\hat{S}_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^m}{(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2} m - 1 = \frac{0{,}03^2 + 0{,}05^2 + 0{,}01^2 + 0{,}01^2 + 0{,}02^2}{4} = \frac{0{,}004}{4} = 0{,}001.$$

Volviendo a la estimación de la varianza:

$$\hat{V}(\hat{\bar{X}})_{congl} = \left(1 - \frac{5}{25}\right) \frac{0{,}001}{5} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}001}{5} = \frac{0{,}0008}{5} = 0{,}00016.$$

c) El efecto de diseño por utilizar muestreo por conglomerados con respecto a usar un muestreo aleatorio simple con la misma cantidad de unidades elementales ($m \cdot N = 75$) viene dado por $1+(N-1)\delta$. Es decir, que el cociente entre la varianza anterior y la varianza que tendríamos en el muestreo aleatorio simple con 75 unidades elementales es:

$$\frac{\hat{V}(\hat{\bar{X}})_{congl}}{\hat{V}(\bar{X})_{MAS}} = 1+(N-1)\delta = 1+14 \cdot \frac{1}{14} = 1+1 = 2 \Rightarrow \hat{V}(\hat{\bar{X}})_{MAS} = \frac{\hat{V}(\hat{\bar{X}})_{congl}}{2} = 0{,}00008.$$

Nota: Si alguien quiere profundizar un poco más en esto, está relacionado con la descomposición de la varianza total como suma de la varianza dentro de los conglomerados y la varianza entre los conglomerados. Ejercicio bastante complicado por los apartados c) y d).

d) Tal y como hemos visto en el apartado anterior el efecto de diseño es 2, indicando que la varianza se duplica en el caso de hacer el muestreo por conglomerados en una etapa frente al muestreo aleatorio simple. Ello se debe a la correlación intraconglomerados positiva que hay, que hace que al elegir todos los elementos dentro del mismo conglomerado estemos recopilando menos información que si los elegimos de manera independiente sin tener en cuenta los conglomerados.

Ejercicio 9 En un determinado país, el Índice de los Precios de Consumo se construye como una media ponderada de los índices de precios de doce grupos de bienes y servicios que componen la cesta de la compra. Se dispone de la siguiente información relativa a la tasa de inflación interanual y a la participación del grupo Equipo del Hogar en el incremento del IPC de cada año respecto al año anterior.

Año	**Tasa de inflación interanual en %**	**Participación del grupo Equipo del Hogar en el incremento del IPC de cada año respecto al anterior (%)**
2023	5	10
2024	10	2
2025	1	1

Si la ponderación del grupo Equipo del Hogar en la construcción del IPC es del 10 %,calcule los índices de precios del grupo Equipo del Hogar para cada año, tomando como base el año 2022.

Solución:

La participación medida en porcentaje se define como:

$$P_{E.Hog} = \frac{R_{E.Hog}}{\Delta IPC} \cdot 100 = \frac{\Delta I_{E.Hog} \cdot w_{E.Hog}}{\Delta IPC} \cdot 100.$$

A través de los datos proporcionados podemos calcular el incremento anual del IPC y el incremento anual del índice de precios del grupo Equipo del Hogar. En primer lugar calculamos la serie completa del IPC para tener sus incrementos anuales. Para ello tenemos en cuenta que conocemos la inflación interanual y que por trabajar en base 2022 para ese año el IPC vale 100:

$$IPC_{2022}^{2023} = 100{\cdot}1{,}05 = 105, \quad IPC_{2022}^{2024} = 105{\cdot}1{,}1 = 115{,}5, \quad IPC_{2022}^{2025} = 115{,}5{\cdot}1{,}01 = 116{,}655.$$

Y por tanto los incrementos absolutos del IPC en cada año se obtienen por diferencia entre cada par de años consecutivos como:

$$\Delta IPC_{2023} = 5 \quad \Delta IPC_{2024} = 10{,}5 \quad \Delta IPC_{2025} = 1{,}155$$

Ahora despejando en la expresión previa tenemos que podemos calcular los incrementos absolutos anuales del índice del grupo Equipo del Hogar. En cada año:

$$\Delta I_{E.Hog} = \frac{\Delta IPC \cdot P_{E.Hog}}{100 \cdot w_{E.Hog}}.$$

Así obtenemos:

$$\Delta I_{E.Hog2023} = \frac{5 \cdot 0{,}1}{0{,}1} = 5 \Rightarrow I_{E.Hog2023} = 100 + 5 = 105.$$

$$\Delta I_{E.Hog2024} = \frac{10{,}5 \cdot 0{,}02}{0{,}1} = 2{,}1 \Rightarrow I_{E.Hog2024} = 105 + 2{,}1 = 107{,}1.$$

$$\Delta I_{E.Hog2025} = \frac{1{,}155 \cdot 0{,}01}{0{,}1} = 0{,}1155 \Rightarrow I_{E.Hog2025} = 107{,}1{+}0{,}1155 = 107{,}2155.$$

Ejercicio 10 Una plataforma web elabora cada mes un informe interno que incluye el ranking sobre cuánto dinero ganan sus influencers. Aunque todos comparten contenido, no todos ganan lo mismo y algunos se llevan una gran parte de los ingresos.

Para analizar la situación, la plataforma ha clasificado a 10 influencers en 5 grupos, según su nivel de popularidad. Cada grupo tiene el mismo número de personas.

Estos son sus ingresos mensuales (en cientos de euros):

Grupo	**Ingreso medio** x_i	**Número** n_i
Microinfluencers	50	2
Top influencers	400	2
Emergentes	100	2
En crecimiento	150	2
Consolidados	200	2

El equipo de análisis quiere responder a una gran pregunta: ¿ Está el dinero bien repartido o unos pocos influencers se están haciendo de oro?

a) Para empezar la investigación, calcule el dinero total que genera cada grupo, el porcentaje acumulado de influencers y el porcentaje acumulado de ingresos.

b) Calcule el índice de Gini y responda a la siguiente cuestión ¿La plataforma web tiene una distribución justa de ingresos?

c) Con esos datos, dibuje la curva de Lorenz añadiendo también la línea de igualdad perfecta. Interprete los resultados.

Solución:

a) El total de dinero que genera cada grupo simplemente es el producto de los ingresos medios por la cantidad de influencers. Además, para calcular adecuadamente los acumulados y los porcentajes acumulados de influencers P_i y los porcentajes acumulados de ingresos Q_i vamos a poner los datos en formato tabla pero teniendo en cuenta que hemos de ordenar los grupos de menores a ingresos a mayores ingresos (en orden creciente de x_i) de manera que tenemos:

Grupo	**Ingreso totales (cientos de euros)** $x_i ni$	N_i	P_i	U_i	Q_i
Microinfluencers	100	2	0,2	100	1/18
Emergentes	200	4	0,4	300	3/18
En crecimiento	300	6	0,6	600	6/18
Consolidados	400	8	0,8	1000	10/18
Top influencers	800	10	1	1800	1

Notar que hemos dejado los acumulados P_i y Q_i expresados en tanto por 1 por comodidad.

Nota: Creo que no merece la pena dar la expresión decimal de los Q_i, sólo si nos sobra mucho tiempo

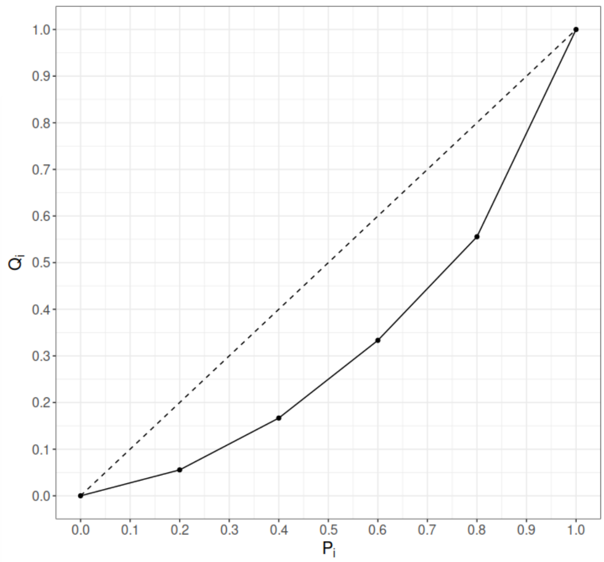
b) Calculamos el índice de Gini utilizando la siguiente expresión:

$$IG = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} P_i - Q_i}{\sum_{i=1}^{k-1} P_i} = \frac{0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}8 - 1/18 - 3/18 - 6/18 - 10/18}{0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}8}$$

$$IG = \frac{2 - 20/18}{2} = 1 - \frac{10}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} = 0{,}44.$$

Teniendo en cuenta que el valor 0 implica igualdad perfecta y que el 1 implica desigualdad total, tenemos una situación en la que hay un cierto nivel de desigualdad, es decir, la distribución de ingresos no es del todo homogénea entre los diferentes influencers.

c) Para dibujar la curva de Lorenz representamos los puntos P_i, Q_i obtenidos previamente y añadimos la línea de igualdad perfecta que es la línea diagonal, ya que en caso de igualdad perfecta se tendría que $P_i = Q_i$ para todos los grupos. El gráfico resultante es:



El valor del índice de Gini expresa la relación entre el área que queda entre la curva de Lorenz y la recta de igualdad perfecta y el área que queda bajo la recta de igualdad perfecta. En el gráfico apreciamos de nuevo que estamos en una situación con un nivel intermedio de desigualdad.

PROCESO SELECTIVO CONVOCADO POR RESOLUCIÓN DE 22 DE DICIEMBRE DE 2025, DE LA SUBSECRETARÍA DE ECONOMÍA, COMERCIO Y EMPRESA (BOE 29 DE DICIEMBRE DE 2025. SEGUNDO EJERCICIO

CUESTIÓN PRÁCTICA 4.

Considere un mercado formado por N empresas idénticas que compiten en cantidades siguiendo el modelo de Cournot. Cada empresa presenta un coste marginal constante e igual a 2. La demanda de mercado del bien homogéneo viene dada por: $P(Q) = 10 - Q$, donde Q representa la producción total del mercado.

Se pide:

a) Obtener la función de reacción de cada empresa que opera en el mercado.

b) Determinar la cantidad producida en equilibrio por cada empresa.

c) Calcular el precio de equilibrio del mercado.

d) Demostrar que, cuando el número de empresas es suficientemente grande, el precio de equilibrio del modelo de Cournot converge al precio de equilibrio bajo competencia perfecta.

<u>Solución</u>

a) Función de reacción

Sea q_i la cantidad producida por la empresa *i* y $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ la producción total del mercado. La demanda inversa del mercado es: $P = 10 - Q$ y el coste marginal de cada empresa, constante e igual a 2 ($CT = 2 \cdot q_i$).

Cada empresa maximiza su beneficio dado lo que producen las demás.

$$\pi_i = P(Q) \cdot q_i - 2 \cdot q_i = (P(Q) - 2) \cdot q_i$$

Como $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i = q_i + Q_{-i}$ donde Q_{-i} es la producción del resto de empresas, el beneficio de la empresa *i* es:

$$\pi_i = (10 - q_i - Q_{-i} - 2) \cdot q_i = (8 - Q_{-i} - q_i)q_i$$

Derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 8 - Q_{-i} - 2q_i = 0$$

$$\boxed{q_i = \frac{8 - Q_{-i}}{2}}$$

Por lo tanto, la función de reacción tiene pendiente negativa: si el resto del mercado produce más, la empresa óptima responde reduciendo su cantidad.

b) Cantidad de equilibrio por empresa

En equilibrio simétrico todas las empresas producen lo mismo: $q_i = q^*$para todo i, por lo que $Q_{-i} = (N-1)q^*$.

Sustituyendo en la función de reacción:

$$q^* = \frac{8 - (N-1)q^*}{2} \rightarrow 2q^* + (N-1)q^* = 8 \rightarrow (N+1)q^* = 8 \rightarrow$$

$$\boxed{q^* = \frac{8}{N+1}}$$

Es decir, la cantidad individual decrece con *N*: más competidores reducen la cuota de cada empresa.

c) Precio de equilibrio

La producción total es $Q^* = N \cdot q^* = \frac{8N}{N+1}$

Sustituyendo en la demanda inversa:

$$P^* = 10 - Q^* = 10 - \frac{8N}{N+1} = \frac{10(N+1) - 8N}{N+1}$$

$$\boxed{P^* = \frac{10 + 2N}{N+1}}$$

Por ejemplo:

- con $N = 1$(monopolio) $P^* = 6$;
- con $N = 2$(duopolio) $P^* = 14/3 \approx 4{,}67$;
- con $N = 10$, $P^* = 30/11 \approx 2{,}73$.

d) Convergencia al precio competitivo

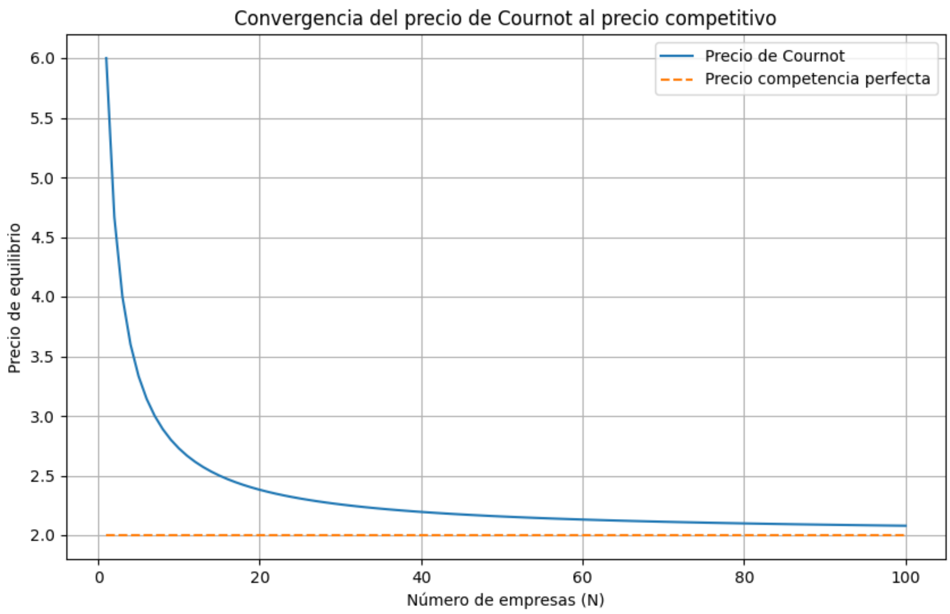
Tomando el límite del precio de Cournot cuando $N \rightarrow \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} P^* = \lim_{N\to\infty} \frac{10 + 2N}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{10/N + 2}{1 + 1/N} = \frac{0+2}{1+0} = 2 = \text{CMg}$$

Queda demostrado que cuando el número de empresas es grande, el precio tiende a 2, que es el coste marginal (resultado de competencia perfecta).

$P = \text{CMg} = 2$, es decir $Q^{CP} = 8$.

El modelo de Cournot actúa, así como un puente entre el monopolio ($N = 1$, máximo poder de mercado) y la competencia perfecta ($N \to \infty$).



CUESTIÓN PRÁCTICA 7

Se conocen los siguientes datos sobre el empleo de una economía (datos en miles):

Horas de puestos principales a tiempo completo (en miles)	29.000
Horas de puestos principales a tiempo parcial (en miles)	3.000
Horas de puestos secundarios (en miles)	5.000
Nº puestos principales a tiempo completo (en miles)	14.500
Nº puestos principales a tiempo parcial (en miles)	2.700
Nº Puestos secundarios (en miles)	4.800

Se pide:

a) Calcule el nº de puestos equivalentes a tiempo completo

b) Explique la diferencia entre puestos de trabajo y personas en el SEC 2010. ¿De esta definición emana que el nº de puestos deba ser siempre mayor al nº de personas?, ¿existe algún caso en el que pueda no cumplirse?

c) La tasa de variación interanual de los puestos de trabajo de los cuatro primeros trimestres del año A fueron 2,6; 3,1; 2,9 y 2,8 respectivamente. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento anual de los puestos de trabajo en el año A? ¿a qué mandato del SEC 2010 da cumplimiento este resultado?

<u>Solución</u>

a) Puestos equivalentes a tiempo completo (PETC)

La fórmula para calcular los puestos de trabajo equivalentes a tiempo completo (en adelante, PETC) es:

$$PETC = \frac{\text{Horas totales trabajadas}}{\text{Horas medias de un puesto a tiempo completo}}$$

Obtenemos las horas totales trabajadas:

$$H_{total} = 29.000 + 3.000 + 5.000 = 37.000 \text{ miles de horas}$$

Calculamos las horas medias de un puesto a tiempo completo:

$$h_{TC} = \frac{29.000}{14.500} = 2 \quad \text{horas/puesto}$$

PETC:

$$PETC = \frac{37.000}{2} = 18.500\, miles\ de\ PETC$$

b) Diferencia entre puestos de trabajo y personas (SEC 2010)

En el SEC 2010, ambos conceptos se distinguen del siguiente modo:

- Puesto de trabajo: unidad estadística que representa un contrato explícito o implícito entre una persona y una unidad institucional para realizar una actividad laboral a cambio de remuneración durante un período definido o indefinido de tiempo. Una misma persona puede ocupar más de un puesto simultáneamente (empleo principal + empleo secundario).
- Persona ocupada: individuo que ha tenido al menos un puesto de trabajo durante el período de referencia, con independencia de cuántos ocupe.

El nº de puestos es mayor que el nº de personas ocupadas por que cada persona tiene al menos un puesto y puede tener varios (pluriempleo), de modo que:

$$N.^{o}\ \text{puestos} > N.^{o}\ \text{personas}$$

En la práctica, cuando se mide el empleo efectivamente ejercido, la igualdad siempre se mantiene, pero las diferencias de fuente estadística (EPA vs. Contabilidad Nacional) pueden generar aparentes inconsistencias. Además, si no existen puestos secundarios, el número de puestos sería igual al número de personas ocupadas (caso extremo teórico).

c) Tasa de crecimiento anual en el año A

La tasa de variación anual se calcula como la media aritmética de las cuatro tasas de variación interanual trimestrales del año, garantizando así la consistencia entre los datos trimestrales y anuales (mandato de consistencia temporal).

$$\bar{t}_A = \frac{t_{T1} + t_{T2} + t_{T3} + t_{T4}}{4} = \frac{2{,}6 + 3{,}1 + 2{,}9 + 2{,}8}{4} = \frac{11{,}4}{4} = 2{,}85\%$$

Mandato del SEC 2010 al que da cumplimiento:

Este resultado responde al principio de consistencia entre estimaciones trimestrales y anuales (coherencia temporal y agregación anual de las cuentas trimestrales). Los datos anuales de empleo sean coherentes con la suma/media de los datos trimestrales, de forma que no existan discrepancias entre la Contabilidad Nacional Anual y la Contabilidad Nacional Trimestral.

CUESTIÓN PRÁCTICA 8.

De una economía se conoce la siguiente información (en u.m.)

Producto Interior Bruto	450
Consumo final individual	299
Consumo final colectivo	36
Formación bruta de capital fijo	94
Consumo de capital fijo	64
Variación de existencias y adquisición menos cesiones de objetos valiosos	7
Producción	700
Renta Nacional Bruta	452
Importaciones de bienes y servicios	141
Renta mixta	48
Remuneración de los asalariados	220
Impuestos sobre los productos	40
Otros impuestos sobre la producción	6
Subvenciones sobre los productos	3
Otras subvenciones a la producción	8

Se pide obtener:

a) Exportaciones de bienes y servicios

b) Excedente bruto de explotación

c) Desarrolle la Cuenta de bienes y servicios

d) La tasa de variación interanual del PIB en los tres primeros trimestres del año A fueron 2,8 - 2,7 - 2,7 respectivamente. Sabiendo que el crecimiento anual del PIB de ese país para el año A fue de 2,8, proporcione una aproximación a qué tasa creció en el último trimestre del año A.

e) Dentro del Consumo Final:

e.1) ¿qué sectores institucionales llevan a cabo gasto en consumo colectivo y cuáles son los que realizan gasto en consumo individual?

e.2) ¿qué tipo de gasto final realiza el sector institucional de las sociedades no financieras, en este contexto

<u>Solución</u>

a) Exportaciones de bienes y servicios

El PIB por el lado de la demanda o el gasto es:

$$\text{PIB} = GCF + FBC + X - M$$

Donde:

$GCF = 299 + 36 = 335$ (gasto en consumo final = consumo final individual + consumo final colectivo).

$I = 94 + 7 = 101$ (formación bruta de capital) y $M = 141$:

$$450 = 335 + 101 + X - 141 \rightarrow \; X = 450 - 335 - 101 + 141 = 155 \text{ u.m.}$$

b) Excedente bruto de explotación (EBE)

El PIB desde la perspectiva de las rentas:

$$\text{PIBpm} = \text{Remuneración asalariados} + \text{Renta mixta} + \text{EBE} + \text{Impuestos netos sobre la producción y las importaciones} \rightarrow$$

$$\rightarrow 450{=}220{+}48{+}\text{EBE}{+}(40{+}6){-}(3{+}8) \rightarrow \text{EBE}{=}147$$

c) Cuenta de bienes y servicios

Necesitamos el valor de los Consumos Intermedios, que obtenemos a partir de la expresión del PIB por la vía de la producción:

$$\text{PIBpm} = \text{Producción - Consumos intermedios} + \text{Impuestos netos sobre los productos} \rightarrow 450{=}700{-}\text{CI}{+}(40{-}3) \rightarrow \text{CI}{=}287$$

Recursos	Operaciones	Empleos
700	Producción	
287	Consumos intermedios	
40	Impuestos sobre los productos	
-3	Subvenciones a los productos	
	Gasto en consumo final	335
	FBC	101
	Exportaciones	155
141	Importaciones	

La identidad contable de la cuenta es: Recursos = Empleos

$$\underbrace{700}_{\text{Producción}} - \underbrace{287}_{\text{Consumos intermedios}} + \underbrace{40-3}_{\text{Imp. netos s/productos}} + \underbrace{141}_{\text{Importaciones}} = \underbrace{335}_{\text{Consumo final}} + \underbrace{101}_{\text{FBK}} + \underbrace{155}_{\text{Exportaciones}}$$

d) Tasa de crecimiento del cuarto trimestre

Se utiliza la propiedad de que la tasa de crecimiento anual es aproximadamente la media aritmética de las tasas trimestrales (en ausencia de ponderaciones):

$$\bar{g} = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{4}$$

Despejando el cuarto trimestre:

$$g_4 = 4 \times g_{\text{anual}} - (g_1 + g_2 + g_3) = 4 \times 2{,}8 - (2{,}8 + 2{,}7 + 2{,}7)$$
$$g_4 = 11{,}2 - 8{,}2 = 3{,}0\%$$

El cuarto trimestre habría crecido aproximadamente un 3,0%, ligeramente por encima de la media anual, lo que compensa el leve descenso registrado en el segundo y tercer trimestres.

e) Consumo final: sectores institucionales

e.1) El consumo final se divide en individual y colectivo según el sector que lo ejecuta:

Sector que realiza el gasto:	**AAPP**	**ISFLSH**	**Hogares**	**Total de adquisiciones**
Consumo individual	Transferencias sociales en especie	Transferencias sociales en especie	Aplicable	**CFE individual de los hogares**
Consumo colectivo	Aplicable	No aplicable	No aplicable	**CFE colectivo de las AAPP**
Total	**GCF de las AAPP**	**GCF de las ISFLH**	**GCF de los hogares**	**CFE total = GCF total**

El **gasto en consumo final colectivo** únicamente puede ser realizado por las Administraciones Públicas (AAPP). Comprende servicios que se prestan simultáneamente a toda la colectividad y en los que no es posible excluir a nadie ni rivalizar en el consumo (defensa, justicia, administración general).

El **gasto en consumo final individual** lo realizan tres sectores: los hogares (todo su gasto en consumo), las AAPP (la parte de servicios públicos asignables a individuos concretos: sanidad, educación, servicios sociales) y las ISFLSH (prestaciones a sus miembros).

e.2) Las **sociedades no financieras** (y las financieras) no realizan gasto en consumo final en las cuentas nacionales. Su gasto en bienes y servicios se contabiliza como consumo intermedio (inputs del proceso productivo) o como formación bruta de capital (inversión en activos fijos). La razón es conceptual: el consumo final se define como el gasto destinado a satisfacer directamente las necesidades humanas, algo que por definición solo corresponde a personas (hogares) o a entidades que actúan en su nombre (AAPP e ISFLSH).