
Índice de problemas por Comunidades Autónomas

Año 2022

Baleares	Página 1
	Problemas 22.1, 22.2, 22.3, 22.4, 22.5, 22.6, 22.7, 22.8, 22.9, 22.10, 22.11, 22.12, 22.13, 22.14, 22.15, 22.16, 22.17, 22.18, 22.19, 22.20, 22.21, 22.22, 22.23, 22.24, 22.25, 22.26, 22.27, 22.28
Galicia	Página 61
	Problemas 22.29, 22.30, 22.31, 22.32, 22.33, 22.34, 22.35, 22.36

Año 2023

Andalucía	Página 83
	Problemas 23.37, 23.38, 23.39, 23.40, 23.41, 23.42, 23.43, 23.44, 23.45, 23.46
Baleares	Página 109
	Problemas 23.47, 23.48, 23.49, 23.50, 23.51, 23.52, 23.53, 23.54, 23.55, 23.56
Cantabria	Página 131
	Problemas 23.57, 23.58, 23.59, 23.60, 23.61, 23.62, 23.63, 23.64
Extremadura	Página 157
	Problemas 23.65, 23.66, 23.67, 23.68, 23.69, 23.70, 23.71, 23.72
La Rioja	Página 173
	Problemas 23.73, 23.74, 23.75, 23.76
Madrid	Página 195
	Problemas 23.77, 23.78, 23.79, 23.80, 23.81, 23.82, 23.83, 23.84
Murcia	Página 213
	Problemas 23.85, 23.86, 23.87, 23.88, 23.89

Año 2024

Baleares	Página 221
	Problemas 24.90, 24.91, 24.92, 24.93, 24.94, 24.95, 24.96, 24.97, 24.98, 24.99
Castilla y León	Página 245
	Problemas 24.100, 24.101, 24.102, 24.103, 24.104, 24.105, 24.106, 24.107
Galicia	Página 267
	Problemas 24.108, 24.109, 24.110, 24.111, 24.112, 24.113, 24.115, 24.116, 24.117

Año 2025

Andalucía	Página 289
	Problemas 25.118, 25.119, 25.120, 25.121, 25.122, 25.123, 25.124, 25.125, 25.126, 25.127, 25.128
Aragón	Página 321
	Problemas 25.129, 25.130, 25.131, 25.132, 25.133, 25.134, 25.135, 25.136
Asturias	Página 347
	Problemas 25.137, 25.138, 25.139, 25.140

Baleares	Página 361
	Problemas 25.141, 25.142, 25.143, 25.144, 25.145, 25.146, 25.147, 25.148, 25.149, 25.150, 25.151, 25.152, 25.153, 25.154, 25.155, 25.156, 25.157, 25.158
Castilla-La Mancha	Página 417
	Problemas 25.159, 25.160, 25.161, 25.162
Castilla y León	Página 435
	Problemas 25.163, 25.164, 25.165, 25.166
Ceuta	Página 453
	Problemas 25.167, 25.168, 25.169, 25.170, 25.171, 25.172
Comunidad Valenciana	Página 465
	Problemas 25.173, 25.174, 25.175, 25.176
Extremadura	Página 477
	Problemas 25.177, 25.178, 25.179, 25.180, 25.181, 25.182, 25.183, 25.184
Galicia	Página 493
	Problemas 25.185, 25.186, 25.187, 25.188, 25.189, 25.190, 25.191, 25.192, 25.193, 25.194
La Rioja	Página 521
	Problemas 25.195, 25.196, 25.197, 25.198
Madrid	Página 533
	Problemas 25.199, 25.200, 25.201, 25.202, 25.203, 25.204, 25.205, 25.206

Melilla	Página 555
	Problemas 25.207, 25.208, 25.209, 25.210, 25.211, 25.212
Murcia	Página 571
	Problemas 25.213, 25.214, 25.215, 25.216
Navarra	Página 583
	Problemas 25.217, 25.218, 25.219, 25.220, 25.221, 25.222
País Vasco	Página 599
	Problemas 25.223, 25.224, 25.225, 25.226
Simulacros de examen 2025	Página 611
	Problemas 25.227, 25.228, 25.229, 25.230, 25.231, 25.232, 25.233, 25.234, 25.235, 25.236, 25.237, 25.238, 25.239, 25.240, 25.241

Índice temático de problemas

Álgebra

Anillos y grupos	22.29, 22.33, 25.144, 25.195
Aplicaciones lineales	22.17, 22.20, 22.23, 22.25, 23.48, 23.83, 24.109, 25.138, 25.150, 25.157, 25.163, 25.173
Aritmética	22.1, 22.18, 22.19, 22.24, 23.47, 23.52, 23.57, 23.65, 23.71, 23.75, 23.85, 23.86, 24.90, 24.94, 24.99, 24.102, 24.104, 24.115, 25.120, 25.128, 25.133, 25.141, 25.144, 25.149, 25.175, 25.179, 25.180, 25.186, 25.193, 25.206, 25.217, 25.232, 25.235, 25.239
Congruencias	22.1, 22.18, 22.24, 23.47, 23.71, 23.75, 24.94, 24.115, 25.120, 25.133, 25.144, 25.149, 25.175, 25.179, 25.186, 25.207, 25.217, 25.232

Determinantes	22.7, 23.43, 23.57, 25.129, 25.167, 25.193, 25.223, 25.238
Diagonalización	23.48, 23.62, 24.107, 25.152
Ecuaciones algebraicas	22.6, 23.77, 24.110, 25.159, 25.188, 25.216, 25.227
Ecuaciones diofánticas	22.24, 23.44, 23.60, 23.75, 23.85, 24.90, 24.94, 24.115, 25.120, 25.239
Espacios vectoriales	22.2, 22.13, 22.17, 22.20, 22.23, 22.25, 23.48, 23.83, 24.96, 24.109, 25.138, 25.150, 25.157, 25.163, 25.173, 25.199, 25.207, 25.217, 25.220
Factorización	23.52, 23.65, 24.102
Matrices	22.17, 22.20, 22.25, 23.43, 23.48, 23.62, 23.83, 24.107, 25.124, 25.127, 25.138, 25.150, 25.152, 25.157, 25.163, 25.173, 25.200, 25.203, 25.238
Polinomios	22.12, 23.53, 23.71, 24.96, 24.116, 25.138, 25.159, 25.163, 25.173, 25.188, 25.189, 25.202, 25.205, 25.216
Potencias de matrices	23.48, 23.62, 24.107, 25.127, 25.144, 25.152
Producto escalar	22.2, 25.168, 25.189
Sistemas de ecuaciones lineales	22.13, 22.17, 23.43, 23.65, 25.124, 25.179

Sistemas de numeración 22.19, 22.24, 23.65, 25.128, 25.141,
25.207, 25.231

Análisis real

Funciones reales de variable real 22.11, 22.16, 23.63, 23.79, 23.86,
23.87, 24.95, 24.98, 24.103, 24.110,
25.170, 25.196, 25.231

Límites de funciones. Continuidad 22.8, 22.11, 22.27, 23.63, 23.79,
24.98, 24.103, 25.130, 25.148, 25.151,
25.170, 25.178, 25.190, 25.198, 25.212

Límites de sucesiones 23.41, 23.50, 23.81, 24.95, 24.103,
24.107, 24.116, 25.129, 25.152,
25.160, 25.171, 25.196, 25.198,
25.213, 25.240

Progresiones aritméticas y geométricas .. 23.53, 25.145, 25.233

Series numéricas 22.26, 23.55, 24.93, 24.106, 24.114,
25.119, 25.139, 25.145, 25.164,
25.181, 25.191, 25.234

Series de potencias 22.8, 23.42, 23.74, 25.145, 25.164,
25.181

Sucesiones recurrentes 22.7, 24.103, 24.107, 25.129, 25.152,
25.171, 25.180, 25.186, 25.198, 25.223

Topología 22.31, 25.200

Cálculo diferencial

Asíntotas	22.11, 24.103, 25.151, 25.170, 25.178, 25.196
Derivadas y aplicaciones	22.11, 22.16, 22.27, 22.28, 22.30, 23.63, 23.70, 23.72, 23.79, 24.91, 24.95, 24.103, 24.108, 24.111, 25.118, 25.124, 25.130, 25.134, 25.147, 25.148, 25.151, 25.170, 25.178, 25.228
Ecuaciones diferenciales	23.67, 23.73
Máximos y mínimos	22.11, 22.28, 22.30, 23.49, 23.63, 23.70, 24.108, 25.118, 25.134, 25.170, 25.178, 25.228
Recta tangente	25.147
Representación de curvas planas	22.11, 23.45, 23.63, 23.73, 23.76, 23.83, 24.116, 25.121, 25.124, 25.151, 25.170, 25.178, 25.196, 25.202, 25.231
Teoremas del valor medio	23.79, 24.91, 24.111

Cálculo integral

Áreas	22.3, 22.30, 23.54, 23.58, 23.76, 25.121, 25.143, 25.156, 25.178, 25.182, 25.211
-------------	--

Integral definida.....	22.3, 22.27, 23.40, 23.50, 23.54, 23.58, 23.74, 23.80, 25.143, 25.148, 25.156, 25.160, 25.161, 25.178, 25.182, 25.189, 25.194, 25.201, 25.213, 25.218, 25.221, 25.224, 25.239
Integrales eulerianas.....	22.10, 23.76
Longitudes de curvas.....	22.3, 23.83, 24.117, 25.221
Primitivas	25.148, 25.188
Teorema fundamental del Cálculo.....	22.27, 25.148
Volúmenes	22.3, 23.40, 23.76, 25.161, 25.194, 25.208, 25.237

Combinatoria

Combinatoria.....	22.14, 22.19, 23.37, 23.51, 23.57, 23.74, 25.154, 25.167, 25.185, 25.230
Grafos.....	22.32, 25.181

Geometría

Áreas de polígonos	22.4, 22.9, 22.12, 23.64, 24.106, 25.122, 25.131, 25.143, 25.147, 25.174, 25.182, 25.183, 25.188, 25.190, 25.236
--------------------------	---

Circunferencia	22.4, 22.9, 22.34, 23.46, 23.76, 24.101, 24.106, 25.123, 25.140, 25.143, 25.155, 25.168, 25.174, 25.182, 25.183, 25.208, 25.212, 25.242
Cónicas.....	23.38, 25.135, 25.153, 25.165, 25.211
Geometría lineal afín	25.242
Geometría métrica	22.4, 22.9, 22.12, 22.15, 22.22, 22.28, 22.34, 23.38, 23.46, 23.49, 23.59, 23.76, 23.78, 23.88, 24.92, 24.101, 24.106, 24.113, 25.122, 25.123, 25.131, 25.135, 25.140, 25.143, 25.153, 25.155, 25.161, 25.165, 25.168, 25.174, 25.182, 25.183, 25.190, 25.208, 25.212, 25.214, 25.219, 25.221, 25.225, 25.229, 25.233, 25.236, 25.237, 25.241
Lugares geométricos.....	22.22, 23.38, 23.76, 23.78, 24.92, 25.135, 25.153, 25.165
Movimientos	23.59
Semejanza de triángulos	22.9, 22.28, 23.38, 24.92, 24.106, 24.113, 25.143, 25.155, 25.208, 25.212, 25.225, 25.228
Trigonometría	22.4, 22.9, 22.15, 22.36, 23.38, 23.74, 24.114, 25.160, 25.205, 25.207, 25.222

Probabilidad

Caminatas al azar	25.185
Distribución binomial.....	25.226
Distribución multinomial	25.204
Distribución normal	23.56
Distribución uniforme continua.....	22.35, 23.64, 23.73, 24.97, 25.126, 25.132, 25.136, 25.241
Esperanza	22.10, 22.26, 23.39, 23.56, 24.100, 25.137, 25.142, 25.146, 25.162, 25.166, 25.181, 25.187, 25.209, 25.241
Fórmula de inclusión-exclusión	24.93, 25.154, 25.238
Funciones de probabilidad/densidad.....	22.10, 23.39, 23.69, 24.97, 24.100, 25.137, 25.142, 25.146, 25.154, 25.162, 25.169, 25.187, 25.197, 25.210
Probabilidad compuesta.....	22.5, 22.21, 22.26, 22.32, 23.37, 23.60, 23.69, 23.80, 24.112, 25.119, 25.154, 25.158, 25.181, 25.191, 25.204, 25.234, 25.238
Probabilidad condicionada	22.10, 22.14, 22.21, 23.37, 23.66, 23.80, 23.82, 23.89, 24.105, 24.112, 25.132, 25.154, 25.158, 25.169, 25.176

Probabilidades geométricas.....	22.35, 23.64, 23.73, 24.97, 25.126, 25.132, 25.136, 25.210, 25.241
Regla de Laplace.....	22.21, 22.26, 22.35, 23.37, 23.39, 23.51, 23.66, 23.80, 23.89, 24.112, 25.146, 25.154, 25.158, 25.176, 25.191, 25.230
Sucesos independientes.....	22.5, 22.26, 23.69, 25.158, 25.215
Teorema de la probabilidad total.....	22.14, 22.21, 22.32, 23.66, 23.80, 23.82, 24.105, 24.112, 25.119, 25.158
Teorema de Bayes.....	22.14, 24.105
Test de hipótesis.....	24.105
Varianza.....	23.56, 24.100, 25.142, 25.146, 25.166, 25.167, 25.187

Variable compleja

Aplicaciones geométricas de los números complejos.....	22.6, 23.59, 23.61, 23.68, 25.184, 25.192
Fórmula de De Moivre.....	22.36, 25.160, 25.205, 25.207
Funciones de variable compleja.....	22.36
Raíces n -ésimas de la unidad.....	25.172

Baleares 2022

Problemas propuestos y soluciones

Mallorca. OPCIÓN A

Número 22.1 Demuestre que el número a_n es divisible por 4 para todo número entero positivo n , donde

$$a_n := (2n + 1)^{2n-1} + (2n - 1)^{2n+1}$$

Una solución. Distinguiremos sobre la paridad del entero positivo n . Si n es par, entonces será $n = 2k$ para cierto $k \in \mathbb{N}^+$ y resulta que

$$\begin{aligned} a_n = a_{2k} &= (4k + 1)^{4k-1} + (4k - 1)^{4k+1} \equiv 1^{4k-1} + (-1)^{4k+1} \pmod{4} \\ &\equiv 1 - 1 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4} \end{aligned}$$

Por otro lado, si n es impar, es decir, si $n = 2k + 1$ para cierto entero no negativo k , entonces

$$\begin{aligned} a_n = a_{2k+1} &= (4k + 3)^{4k+1} + (4k + 1)^{4k+3} \equiv 3^{4k+1} + 1^{4k+3} \pmod{4} \\ &\equiv (-1)^{4k+1} + 1^{4k+3} \pmod{4} \equiv -1 + 1 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4} \end{aligned}$$

En consecuencia, tanto si n es par como si es impar ocurre que $a_n \equiv 0 \pmod{4}$, es decir, a_n es divisible por 4, que era lo que pretendíamos probar.

Otra solución. Si recurrimos a la fórmula del binomio, podemos escribir

$$(2n + 1)^{2n-1} = \binom{2n-1}{0} (2n)^{2n-1} + \binom{2n-1}{1} (2n)^{2n-2} + \binom{2n-1}{2} (2n)^{2n-3} + \dots$$

$$+ \binom{2n-1}{2n-2} (2n) + \binom{2n-1}{2n-1}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} (2n-1)^{2n+1} &= \binom{2n+1}{0} (2n)^{2n+1} - \binom{2n+1}{1} (2n)^{2n} + \binom{2n+1}{2} (2n)^{2n-1} - \dots \\ &\quad + \binom{2n+1}{2n} (2n) - \binom{2n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

Ahora, al sumar miembro a miembro ambas igualdades y agrupar, se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \binom{2n+1}{0} (2n)^{2n+1} - \binom{2n+1}{1} (2n)^{2n} \\ &\quad + \left[\binom{2n-1}{0} + \binom{2n+1}{2} \right] (2n)^{2n-1} + \left[\binom{2n-1}{1} - \binom{2n+1}{3} \right] (2n)^{2n-2} \\ &\quad + \dots + \left[\binom{2n-1}{2n-2} + \binom{2n+1}{2n} \right] (2n) + \left[\binom{2n-1}{2n-1} - \binom{2n+1}{2n+1} \right] \end{aligned}$$

El último sumando entre corchetes es nulo y el penúltimo sumando es

$$\left[\binom{2n-1}{1} + \binom{2n+1}{1} \right] \cdot 2n = (2n-1 + 2n+1) \cdot 2n = 8n^2$$

que es múltiplo de 4. Los restantes sumandos contienen al factor $(2n)^k = 2^k n^k$, donde $k = 2, \dots, 2n+1$, luego son múltiplos de 4 y por tanto a_n es múltiplo de 4.

Una solución más. Escribimos

$$\begin{aligned} a_n &= (2n+1)^{2n-1} + (2n-1)^{2n+1} = ((2n-1)+2)^{2n-1} + (2n-1)^{2n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} (2n-1)^{2n-1-j} \cdot 2^j + (2n-1)^{2n+1} \\ &= (2n-1)^{2n-1} + (2n-1)(2n-1)^{2n-1-1} \cdot 2 \\ &\quad + \sum_{j=2}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} (2n-1)^{2n-1-j} \cdot 2^j + (2n-1)^{2n+1} \end{aligned}$$

Como el sumando

$$\sum_{j=2}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} (2n-1)^{2n-1-j} \cdot 2^j$$

es múltiplo de 4 es suficiente demostrar que también lo es

$$b_n := (2n-1)^{2n-1} + (2n-1)(2n-1)^{2n-1-1} \cdot 2 + (2n-1)^{2n+1}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} b_n &:= 3(2n-1)^{2n-1} + (2n-1)^2(2n-1)^{2n-1} \\ &= (2n-1)^{2n-1}(3 + 4n^2 - 4n + 1) = 4(2n-1)^{2n-1}(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

es múltiplo de 4.

Número 22.2 *Dados los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, se define*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$$

Demuestre que $\cdot$ es un producto escalar.

Una solución. Lo que debe probarse es que el producto $\cdot$ es una forma bilineal simétrica y definida positiva. En primer lugar, $\cdot$ es lineal en la primera componente puesto que si λ y λ' son números reales cualesquiera y $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} &(\lambda\vec{x} + \lambda'\vec{x}') \cdot \vec{y} \\ &= 2(\lambda x_1 + \lambda' x'_1)y_1 + (\lambda x_1 + \lambda' x'_1)y_2 + (\lambda x_2 + \lambda' x'_2)y_1 + 4(\lambda x_2 + \lambda' x'_2)y_2 \\ &= \lambda(2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + 4x_2y_2) + \lambda'(2x'_1y_1 + x'_1y_2 + x'_2y_2 + 4x'_2y_2) \\ &= \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) + \lambda'(\vec{x}' \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$

El producto $\cdot$ es además simétrico, pues

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 4y_2x_2 = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

Lo anterior demuestra que $\cdot$ es una forma bilineal simétrica. Sólo resta comprobar que dicha forma bilineal es definida positiva. Así ocurre en efecto pues si $\vec{x} \neq \vec{0}$,

alguna de las coordenadas de $\vec{x}$ es no nula; suponiendo que lo es x_1 , resulta que

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 2x_1^2 \left(1 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right) + 2 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right) > 0$$

pues $1 + t + 2t^2$ es un polinomio sin raíces reales y que, en consecuencia, toma valores positivos para todo $t \in \mathbb{R}$.

Otra solución. Dados vectores cualesquiera $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, el número real $\vec{x} \cdot \vec{y}$ puede ser expresado como el producto matricial

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Esto ya prueba que el producto $\cdot$ es una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$. Como la matriz

$$G := (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es simétrica, también lo es la forma bilineal $\cdot$ y dado que, además, G es definida positiva por ser $\Delta_1 = g_{11} = 2 > 0$ y $\Delta_2 = \det G = 7 > 0$, concluimos que la forma bilineal $\cdot$ es un producto escalar sobre $\mathbb{R}^2$.

Obsérvese que G es la matriz cuadrada de orden 2 cuyo elemento de lugar (i, j) es $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, donde $\vec{e}_1 = (1, 0)$ y $\vec{e}_2 = (0, 1)$ son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. A G se le suele llamar *matriz métrica* o también *matriz de Gram* del producto escalar $\cdot$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Número 22.3 Sea A la región acotada del plano de ordenadas no negativas delimitada por las curvas $y = x^2$ y $x^2 + y^2 = 2$. Calcule:

- (1) El área de la región A .
- (2) El volumen del cuerpo de revolución que genera la región A al girar en torno al eje OY
- (3) El perímetro de A .