ESTABILIZACIÓN

Número 23.63 *Demuestre que la sucesión* (b_n) *dada por*

$$b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

es convergente y determine su límite

Solución. Los primeros términos de la sucesión son

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{120}, \ldots$$

y observamos, sin derroche alguno de agudeza visual, que, en valor absoluto, dichos términos b_n pueden hacerse tan pequeños como se quiera con tal de elegir n suficientemente grande.

Comprobamos, recurriendo a la definición de límite, que efectivamente la sucesión (b_n) es convergente y que su límite es 0. Si para ello fijamos $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe cierto número natural n_0 tal que $n_0\epsilon > 1$. Siendo así, para cada $n > n_0$ se cumple que

$$|b_n - 0| = \left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

y, en consecuencia, la sucesión (b_n) es convergente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Número 23.64 *Una urna contiene* 4 *bolas rojas y* 6 *bolas blancas. Una segunda urna contiene* 6 *bolas rojas y* 4 *blancas. Se traslada una bola de la primera urna a la segunda y a continuación se extrae una bola de la segunda urna.*

(1) *¿Forman los sucesos "trasladar una bola roja o una bola blanca de la primera urna a la segunda" un sistema completo? Razone la respuesta.*

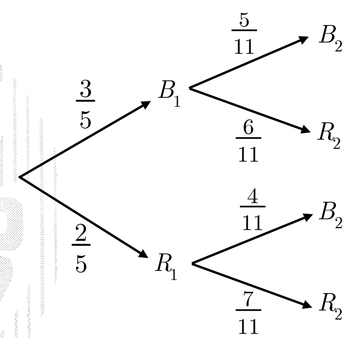
(2) *Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.*

Solución. (1) Para $i = 1, 2$, denotamos B_i el suceso *la bola extraída de la urna i-ésima es blanca*, y R_i al suceso *la bola extraída de la urna i-ésima es roja*. Recuérdese que un sistema completo de sucesos es una partición del espacio muestral formado por sucesos de probabilidad no nula. Así, dado que:

- $B_1 \cap R_1 = \varnothing$, puesto que la bola extraída no puede ser blanca y roja a la vez.
- $B_1 \cup R_1 = \Omega$, puesto que la bola extraída o es blanca o es roja.
- $p(B_1) = \frac{6}{10} > 0$, $p(R_1) = \frac{4}{10} > 0$

deducimos que $\{B_1, R_1\}$ es un sistema completo de sucesos.

(2) Ilustremos con un diagrama de árbol las diferentes situaciones que se pueden dar al extraer la bola de la segunda urna. Acudiendo al Teorema de la Probabilidad Total:



$$
\begin{aligned}
p(B_2) &= p(B_1) \cdot p(B_2 \mid B_1) + p(R_1) \cdot p(B_2 \mid R_1) \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{11} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{23}{55}
\end{aligned}
$$

Número 23.65 *Se da la siguiente curva $\mathcal{C}$ en coordenadas polares:*

$$\rho = 2 - 2\cos\theta$$

(1) *¿Cómo se denomina a esta curva?*

(2) *Realice la representación gráfica de la curva de forma aproximada y a mano alzada.*

(3) *Discuta sus simetrías.*

(4) *Calcule la longitud de arco total de dicha curva.*

Solución. (1) En general, cualquier curva que admita por ecuación polar a una del tipo $\rho = a(1 \pm \cos\theta)$, donde $a > 0$, se denomina *cardioide*.

(2) y (3) Haremos un estudio completo de las propiedades de la curva para obtener su representación gráfica, aunque probablemente no se pidiera tanto en el examen. Denotaremos f a la función $\theta \mapsto \rho = f(\theta) := 2 - 2\cos\theta$.

1. Dominio de definición y periodicidad. La función f está definida en todo $\mathbb{R}$ y es, por serlo la función coseno, periódica de período 2π, es decir, cumple que $f(\theta + 2\pi) = f(\theta) = \rho$, para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, lo que viene a decir que si (ρ, θ) es un punto de la curva $\mathcal{C}$, el punto $(\rho, \theta + 2\pi)$ también está en $\mathcal{C}$. Por tanto, la curva $\mathcal{C}$ se recorre completamente para los θ de cualquier intervalo de amplitud 2π, por ejemplo los de $[-\pi, \pi]$, es decir,

$$\mathcal{C}: \quad \rho = 2 - 2\cos\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

2. Simetrías. Para cualquier $\theta \in [-\pi, \pi]$ ocurre que

$$f(-\theta) = 2 - 2\cos(-\theta) = 2 - 2\cos\theta = f(\theta)$$

es decir, si $(\rho, \theta) \in \mathcal{C}$, entonces también $(\rho, -\theta) \in \mathcal{C}$, luego la curva $\mathcal{C}$ es simétrica respecto del eje polar $\theta = 0$. Por tanto, será suficiente dibujar el arco $\mathcal{C}_1$ correspondiente a los $\theta \in [0, \pi]$ y completarlo con su simétrico respecto del eje polar para obtener el dibujo completo de $\mathcal{C}$. Este arco $\mathcal{C}_1$ arranca en el punto $(\rho, \theta) = (0, 0)$, es decir, en el polo y termina en el punto $(\rho, \theta) = (4, \pi)$.

3. Ramas infinitas. Obsérvese que el arco $\mathcal{C}_1$ carece de ramas infinitas pues para cada $\theta \in [0, \pi]$ es

$$|\rho| = 2|1 - \cos\theta| \leq 2 \cdot (1 + |\cos\theta|) \leq 2 \cdot 2 = 4$$

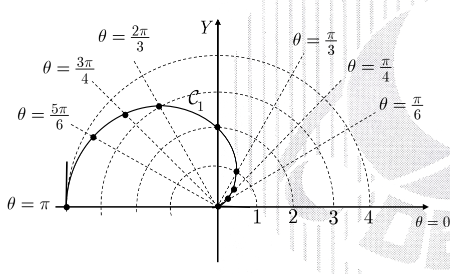
4. Tangentes. Como es $\rho = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 1$, la única tangente al arco $\mathcal{C}_1$ en el polo es la semirrecta $\theta = 0$. Obsérvese además que $\rho = 2 - 2\cos\theta \geq 0$ para cada $\theta \in [0, \pi]$, lo que indica que el arco $\mathcal{C}_1$ está totalmente contenido en los cuadrantes primero y segundo entre las semirrectas $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

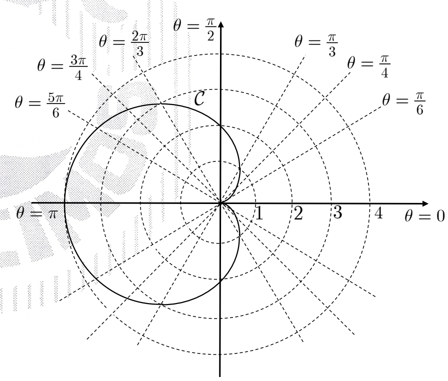
Como es $\rho' = 2\operatorname{sen}\theta$, ocurre que $\rho' = 0$ cuando $\operatorname{sen}\theta = 0$, esto es, cuando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, así que la tangente es perpendicular al rediovector cuando $\theta = \pi$, es decir, en el punto $(\rho, \theta) = (4, \pi)$ (en $\theta = 0$ se trata del polo, que no tiene radiovector). Como es $\rho' = 2\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para cada $\theta \in [0, \pi]$, resulta que ρ es creciente y, por ser $\rho \geq 0$, la curva se va alejando del polo desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

5. Puntos complementarios. Dando a θ valores entre 0 y π cuyas razones trigonométricas sean conocidas se construye la tabla siguiente:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	0	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	1	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	4

De lo deducido hasta aquí se deduce el dibujo del arco $\mathcal{C}_1$, que es el que figura debajo de estas líneas a la izquierda y, tras completarlo con su simétrico respecto del eje polar, el dibujo de la cardioide $\mathcal{C}$, que es el que figura a la derecha.





(4) La longitud de la curva $\mathcal{C}$ es, por la simetría respecto del eje polar, el doble de la longitud del arco $\mathcal{C}_1$, es decir,

$$\ell = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta$$

En nuestro caso $f(\theta) = 2(1 - \cos\theta)$, luego $f'(\theta) = 2\operatorname{sen}\theta$, por lo que

$$f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 = 4(1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 8(1 - \cos\theta)$$

$$= 8\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) = 8 \cdot 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = 16\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

En consecuencia, como $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} = 4\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right| = 4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

y la longitud de la cardioide es

$$\ell = 2 \cdot \int_0^{\pi} 4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta = -16\left[\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 16$$

Número 23.66 *Consideremos en el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ las bases*

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \quad y \quad \mathcal{B}_2 := \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

donde $\vec{e}_1 := (1,0)$, $\vec{e}_2 := (0,1)$, $\vec{u}_1 := (1,3)$ y $\vec{u}_2 := (2,5)$.

(1) *Halle la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.*

(2) *Compruebe que se cumple $C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1}$.*

(3) *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal definido como $T(x,y) := (2y, 3x - y)$. Demostrar que la matriz $M_T(\mathcal{B}_2)$ de T respecto de la base $\mathcal{B}_2$ cumple la igualdad*

$$M_T(\mathcal{B}_1) = C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1} \cdot M_T(\mathcal{B}_2) \cdot C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),$$

donde $M_T(\mathcal{B}_1)$ es la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}_1$.

Solución. (1) Por definición, las columnas de $C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_2$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$. Como $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ y $\vec{u}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ se tiene

$$C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) Nótese que

$$2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = 2(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) - (2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) = \vec{e}_2,$$

y por tanto

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 - 3\vec{e}_2 = \vec{u}_1 - 3(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = -5\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2,$$

por lo que

$$C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y, para comprobar que las matrices $C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ y $C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ son mutuamente inversas, es suficiente demostrar que su producto, en el orden que elijamos, es la matriz unidad. Y, efectivamente, se tiene

$$C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \cdot C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Como $T(1,0) = (0,3)$ se tiene $T(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_2$, mientras que $T(0,1) = (2,-1)$, o sea, $T(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. En consecuencia, la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}_1$ es

$$M_T(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, como $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ y $\vec{u}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ se tiene

$$T(\vec{u}_1) = T(\vec{e}_1) + 3T(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_2 + 3(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 6\vec{e}_1 \quad \text{y}$$

$$T(\vec{u}_2) = 2T(\vec{e}_1) + 5T(\vec{e}_2) = 6\vec{e}_2 + 10\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 = 10\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

En el apartado (2) hemos visto que $\vec{e}_1 = -5\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ y $\vec{e}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, luego sustituyendo estos valores en las igualdades anteriores resulta

$$T(\vec{u}_1) = 6\vec{e}_1 = 6(-5\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = -30\vec{u}_1 + 18\vec{u}_2,$$

mientras que

$$T(\vec{u}_2) = 10\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = 10(-5\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) + 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = -48\vec{u}_1 + 29\vec{u}_2$$

Por tanto,

$$M_T(\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

Como $C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1} = C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$, la igualdad

$$M_T(\mathcal{B}_1) = C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1} \cdot M_T(\mathcal{B}_2) \cdot C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),$$

que se pide comprobar es la misma que

$$M_T(\mathcal{B}_1) = C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \cdot M_T(\mathcal{B}_2) \cdot C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),$$

El miembro de la izquierda es

$$M_T(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y el miembro de la derecha vale

$$\begin{aligned} C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \cdot M_T(\mathcal{B}_2) \cdot C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego efectivamente

$$M_T(\mathcal{B}_1) = C(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \cdot M_T(\mathcal{B}_2) \cdot C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),$$

como queríamos probar