Madrid 2023

DEIMOS

Problemas propuestos y soluciones

Número 23.46 *Halle todas las soluciones de la ecuación*

$$z^3 - (8 + \mathtt{i})z^2 + (24 + 4\mathtt{i})z - (24 - 6\mathtt{i}) = 0,$$

teniendo en cuenta que el producto de dos de ellas es $15 + 9\mathtt{i}$.

Solución. Si los números complejos z_1, z_2 y z_3 son las tres soluciones de la ecuación, en virtud de la tercera fórmula de Cardano para la misma, será $z_1z_2z_3 = 24 - 6\mathtt{i}$. Si asumimos que es $z_1z_2 = 15 + 9\mathtt{i}$, dicha fórmula queda $(15 + 9\mathtt{i})z_3 = 24 - 6\mathtt{i}$, y por tanto,

$$z_3 = \frac{24 - 6\mathtt{i}}{15 + 9\mathtt{i}} = \frac{(24 - 6\mathtt{i})(15 - 9\mathtt{i})}{(15 + 9\mathtt{i})(15 - 9\mathtt{i})} = \frac{306(1 - \mathtt{i})}{306} = 1 - \mathtt{i}$$

La primera de las fórmulas de Cardano establece que $z_1 + z_2 + z_3 = 8 + \mathtt{i}$, es decir, $z_1 + z_2 = 8 + \mathtt{i} - (1 - \mathtt{i}) = 7 + 2\mathtt{i}$. Por tanto, los números complejos z_1 y z_2 son tales que $z_1 + z_2 = 7 + 2\mathtt{i}$ y $z_1z_2 = 15 + 9\mathtt{i}$. Esto equivale a decir que z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación

$$z^2 - (7 + 2\mathtt{i})z + (15 + 9\mathtt{i}) = 0,$$

que son

$$z = \frac{7 + 2\mathtt{i} \pm \sqrt{(7 + 2\mathtt{i})^2 - 4(15 + 9\mathtt{i})}}{2} = \frac{7 + 2\mathtt{i} \pm \sqrt{-15 - 8\mathtt{i}}}{2}$$

Para calcular las dos raíces cuadradas de $-15 - 8\mathtt{i}$ ponemos $(a + b\mathtt{i})^2 = -15 - 8\mathtt{i}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, y al desarrollar el cuadrado del primer miembro e igualar después la parte real y la parte imaginaria de ambos miembros, se deduce que

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ ab = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} b^2 = a^2 + 15 \\ a^2 b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \quad a^2(a^2+15) = 16 \quad \Rightarrow$$

$$a^4 + 15a^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{-15 + \sqrt{225+64}}{2} = \frac{-15+17}{2} = 1$$

luego $a = \pm 1$ y $b = -\frac{4}{a} = \mp 4$, es decir, $(1 - 4\mathtt{i})^2 = -15 - 8\mathtt{i}$ y por tanto

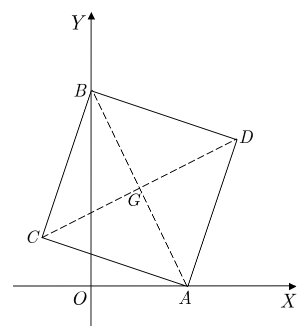
$$z = \frac{7 + 2\mathtt{i} \pm \sqrt{-15 - 8\mathtt{i}}}{2} = \frac{7 + 2\mathtt{i} \pm (1 - 4\mathtt{i})}{2} = \begin{cases} 4 - \mathtt{i} \\ 3 + 3\mathtt{i} \end{cases}$$

son las otras dos soluciones de la ecuación. La ecuación tiene por tanto como soluciones a

$$z_1 = 4 - \mathtt{i}, \qquad z_2 = 3 + 3\mathtt{i}, \qquad z_3 = 1 - \mathtt{i}$$

Número 23.47 *Se dan los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (0, b)$ donde $a + b = 2d$ y d es constante. Sobre el segmento $\overline{AB}$ como diagonal se construye un cuadrado cuyos otros vértices son C y D. Demuestre que, al variar A y B, uno de los vértices C o D se mantiene fijo y halle el lugar geométrico que describe el otro.*

Este problema ha sido resuelto durante el curso 22/23 en los grupos avanzados de la Academia Deimos y es además el ejercicio 88.16 del volumen 3 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.



Solución. Los vértices A y B del cuadrado tienen coordenadas $A = (a, 0)$ y $B = (0, 2d - a)$, donde d es constante y a es variable. El vector $\overrightarrow{CD}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-a, 2d - a)$ y tiene su misma longitud, por lo que será $\overrightarrow{CD} = (2d - a, a)$. Como las coordenadas del centro del cuadrado son las del punto medio del segmento $\overline{AB}$, es decir,

$$G = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{a}{2}, d - \frac{a}{2}\right),$$

las coordenadas de los otros dos vértices C y D del cuadrado serán

$$C = G - \overrightarrow{CG} = G - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \left(\frac{a}{2}, d - \frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}(2d - a, a) = (a - d, d - a)$$

$$D = G + \overrightarrow{CG} = G + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \left(\frac{a}{2}, d - \frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}(2d - a, a) = (d, d)$$

Esto prueba que el vértice D del cuadrado se mantiene fijo al variar A y B y que sus coordenadas son $D = (d, d)$. Por otro lado, si (x, y) son las coordenadas del vértice C, según lo anterior serán

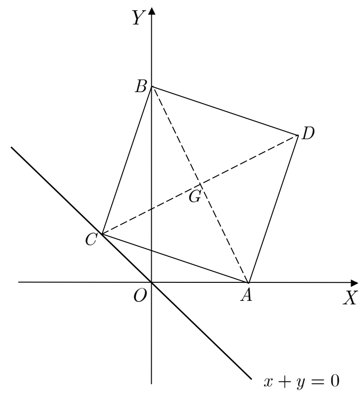
$$x = a - d, \qquad y = d - a,$$

y al eliminar el parámetro a de entre ambas ecuaciones, se deduce que el lugar geométrico que describe el vértice C está contenido en la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, de ecuación $x + y = 0$.

Restaría demostrar que, recíprocamente, cualquier punto de la bisectriz anterior es del lugar geométrico solicitado. Esto es sencillo de probar, porque si $C = (t, -t)$, donde $t \in \mathbb{R}$ es cualquier punto de dicha bisectriz, el cuadrilátero de vértices

$$A = (d{+}t, 0),\ B = (0, d{-}t),\ C = (t, -t),\ D = (d, d)$$

es un cuadrado cuyas diagonales son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y tal que la suma de la abscisa de A y la ordenada de B es $(d + t) + (d - t) = 2d$ (en el caso de que fuesen $t = 0$ y $d = 0$ el cuadrado se reduce a un punto, que es el origen).



En suma, el lugar geométrico que pide el problema es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, de ecuación $x + y = 0$.

Número 23.48 *Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:*

(1) *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función que cumple las dos condiciones siguientes:*

$$i)\ f(x+y) = f(x)\cdot f(y),\ \ \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}; \qquad ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1.$$

Demuestre que f *es derivable en cada* $x \in \mathbb{R}$ *y obtenga una expresión explícita de* f.

(2) *Demuestre que para cada* $n \in \mathbb{N}^+$ *se cumple que*

$$\frac{1}{n+1} < \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\, n < \frac{1}{n}.$$

(3) *Demuestre que para todo número natural positivo* n *se cumple que*

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) - 1 < \mathrm{L}(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Este problema ha sido resuelto durante el curso 22/23 en los grupos avanzados de la Academia Deimos. El apartado (1) figura además resuelto en la página 515 del volumen 2 de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

Solución. (1) Si $x \in \mathbb{R}$ es cualquiera, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot (f(h)-1)}{h}$$
$$= f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = f(x)\cdot 1 = f(x)$$

Esto prueba que f es derivable en x y que

$$f'(x) = f(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Para encontrar la expresión explícita de f, considérese la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) := \frac{f(x)}{e^x}.$$

Como f es derivable en cualquier $x \in \mathbb{R}$, la función g es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ como cociente de funciones derivables cuyo denominador nunca es nulo. Se tiene así que, para cada $x \in \mathbb{R}$, que

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$$

Dado que la derivada de g es nula en todo $\mathbb{R}$, deducimos que g es constante, es decir, será $g(x) = c$ para cierto $c \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\frac{f(x)}{e^x} = c \quad \Longrightarrow \quad f(x) = c \cdot e^x$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Dado que además,

$$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = f(0)^2$$

deducimos que $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$. Si fuese $f(0) = 0$, entonces sería $c = 0$ y f sería la función nula, pero esto es imposible porque en tal caso f no cumpliría ii). Por tanto, $f(0) = 1$ y $c = f(0) = 1$. La función f es, en consecuencia, la definida para cada $x \in \mathbb{R}$, como

$$f(x) = e^x$$

(2) La función $x \mapsto h(x) := \operatorname{L} x$ es derivable en todo $x > 0$, de manera que al aplicar a h el Teorema de los incrementos finitos en el intervalo $[n, n+1]$ se deduce la existencia de cierto punto intermedio $\xi \in (n, n+1)$ tal que

$$h(n+1) - h(n) = h'(\xi) \cdot (n+1-n), \quad \text{es decir,} \quad \operatorname{L}(n+1) - \operatorname{L} n = \frac{1}{\xi}$$

Ahora, como es $n < \xi < n+1$, deducimos que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$, es decir,

$$\frac{1}{n+1} < \operatorname{L}(n+1) - \operatorname{L} n < \frac{1}{n}$$

como había que demostrar.

(3) Si escribimos la doble desigualdad anterior para $n, n-1, \ldots, 2, 1$ se tiene que

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} & < & \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}\, n & < & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & < & \mathrm{L}\, n - \mathrm{L}(n-1) & < & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & < & \mathrm{L}(n-1) - \mathrm{L}(n-2) & < & \frac{1}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{3} & < & \mathrm{L}\, 3 - \mathrm{L}\, 2 & < & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & < & \mathrm{L}\, 2 - \mathrm{L}\, 1 & < & 1 \end{cases}$$

Al sumar todas estas desigualdades miembro a miembro se deduce que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \mathrm{L}(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

que es la doble desigualdad que había que demostrar.

Otra forma de obtener $f(x)$. Una vez probado que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la expresión explícita de $f(x)$ puede obtenerse como sigue: $f(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, pues

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$$

y si existiese algún $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$ sería

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0) \cdot f(x_0) = 0$$

pero esto es imposible porque la función nula no cumple la condición ii) del enunciado. Garantizado así que f es una función positiva, la igualdad $f'(x) = f(x)$ se escribe en la forma equivalente

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

y al integrar en ambos miembros se deduce la existencia de cierto $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{L}\, f(x) = x + k \quad \Longrightarrow \quad f(x) = e^{x+k}$$

Dado que, como se probó en (1), es $f(0) = 1$, deducimos que $k = 0$ y que, en consecuencia, para cada $x \in \mathbb{R}$ es

$$f(x) = e^x$$

Número 23.49 *Disponemos de $N+1$ urnas numeradas, cada una de las cuales tiene N bolas, blancas o rojas, de tal manera que la urna k-ésima tiene k bolas blancas y $N-k$ bolas rojas, para $k=0,1,\ldots,N$. Elegimos una urna al azar y extraemos sucesivamente y con reemplazamiento n bolas.*

(1) *Encuentre la probabilidad de que todas las bolas extraídas sean blancas y calcule el límite de esta probabilidad cuando $N \to \infty$.*

(2) *Si se hace una extracción más, encuentre la probabilidad de que la bola extraída en $(n+1)$-ésimo lugar sea blanca, suponiendo que las n bolas elegidas con anterioridad son blancas. Calcule el límite de esta probabilidad cuando $N \to \infty$,*

Solución. (a) Denotamos U_k al suceso *elegir la urna k-ésima*, para $k=0,1,\ldots,N$. Si S_n es el suceso *las n bolas extraídas son blancas*, en virtud del teorema de la probabilidad total será

$$p\left(S_n\right)=\sum_{k=0}^{N} p\left(U_k\right)\cdot p\left(S_n\middle|\, U_k\right)$$

Como la elección de la urna es al azar, es inmediato que, para cada $k=0,1,\ldots,N$

$$p\left(U_k\right)=\frac{1}{N+1}$$

Por otro lado, la probabilidad de que las n bolas extraídas sucesivamente y con reemplazamiento de la urna k-ésima sean todas blancas será

$$p\left(S_n\middle|\, U_k\right)=\frac{k}{N}\cdot\frac{k}{N}\cdots\frac{k}{N}=\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

Por tanto,

$$p\left(S_n\right)=\sum_{k=0}^{N} p\left(U_k\right)\cdot p\left(S_n\middle|\, U_k\right)=\frac{1}{N+1}\cdot\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n=\frac{1}{N+1}\cdot\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

El límite cuando $N \to \infty$ de la probabilidad anterior puede escribirse, multiplicando y dividiendo por N, en la forma:

$$\lim_{N\to\infty} p\left(S_n\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \left(\lim_{N\to\infty} \frac{N}{N+1}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

La expresión $\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$ es la suma de Riemann $\sigma(f, \mathcal{P}_N, \mathcal{C}_N)$ de la función $x \mapsto f(x) := x^n$ relativa a la partición $\mathcal{P}_N = \left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\right\}$ del intervalo $[0,1]$ y a la colección de puntos intermedios $\mathcal{C}_N = \left\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\right\}$. Por tanto, como f es continua y por tanto integrable en el intervalo $[0,1]$, se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} p\left(S_n\right) = \lim_{N\to\infty} \sigma(f, \mathcal{P}_N, \mathcal{C}_N) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n+1}$$

(b) Si B_{n+1} es el suceso *la* $(n+1)$*-ésima bola extraída es blanca*, entonces $S_n \cap B_{n+1}$ es el suceso *las* $n+1$ *bolas extraídas son blancas*, es decir, $S_n \cap B_{n+1} = S_{n+1}$. Por tanto, la probabilidad de que la $(n+1)$-ésima bola extraída sea blanca sabiendo que lo fueron las n primeras es, según lo deducido en (1),

$$p\left(B_{n+1} \middle| S_n\right) = \frac{p\left(B_{n+1} \cap S_n\right)}{p\left(S_n\right)} = \frac{p\left(S_{n+1}\right)}{p\left(S_n\right)} = \frac{\frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N} k^{n+1}}{\sum_{k=1}^{N} k^{n}}$$

y

$$\lim_{N\to\infty} p\left(B_{n+1} \middle| S_n\right) = \frac{\lim_{N\to\infty} p\left(S_{n+1}\right)}{\lim_{N\to\infty} p\left(S_n\right)} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Otra forma de calcular el límite de (1). El límite

$$\lim_{N\to\infty} p\left(S_n\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} k^n}{N^{n+1}}$$

puede calcularse gracias a la Regla de Stolz. Dado que la sucesión $(N^{n+1})_{N=1}^{\infty}$ es monótona y divergente hacia $+\infty$, según dicha Regla será

$$\lim_{N\to\infty} p\left(S_n\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} k^n - \sum_{k=1}^{N-1} k^n}{N^{n+1}-(N-1)^{n+1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{N^n}{N^{n+1}-(N-1)^{n+1}}$$

Si ahora acudimos a la fórmula del binomio y desarrollamos $(N-1)^{n+1}$, queda

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} p\left(S_n\right) &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^n}{N^{n+1}-\left[N^{n+1}-\binom{n+1}{1}N^n+\binom{n+1}{2}N^{n-1}-\cdots+(-1)^{n+1}\right]} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^n}{\binom{n+1}{1}N^n-\binom{n+1}{2}N^{n-1}+\cdots-(-1)^{n+1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{N^n}{\binom{n+1}{1}N^n} = \frac{1}{\binom{n+1}{1}} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$