Braulio de Diego Martín
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria (excedente).
Profesor Titular de Escuela Universitaria. Universidad de Alcalá de Henares.

Agustín Llerena Achútegui
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad de Alcalá de Henares.

Francisco José Baena Muñoz
Profesor de Enseñanza Secundaria.

María Belén Rodríguez Rodríguez
Profesora de Enseñanza Secundaria.

José Manuel Gamboa Mutuberría
Catedrático de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid.

José María Lorenzo Magán
Profesor de Enseñanza Secundaria.
Profesor Asociado. Universidad Complutense de Madrid.

PROBLEMAS DE OPOSICIONES

MATEMÁTICAS

378
PROBLEMAS

Tomo 4
(1996 a 2005)
2ª EDICIÓN

DEIMOS

Preparación del ejercicio práctico de las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria

© Editorial Deimos
Glorieta del Puente de Segovia, 3
28011 Madrid
Tel.: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
editorial@academiadeimos.es

I.S.B.N: 978-84-86379-32-2 (Obra completa)
I.S.B.N: 978-84-86379-86-5 (Tomo 4)
Depósito legal: M-7612-2014

Imprime: SERVICE POINT

Prólogo

Presentamos al lector la segunda edición del cuarto volumen de la colección *Problemas de Oposiciones a Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas*, cuyo primer volumen recogía problemas propuestos en las citadas oposiciones desde 1969. En este cuarto volumen se resuelven los problemas propuestos desde 1996 a 2005 por los tribunales que han juzgado las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, en la especialidad de Matemáticas, en las diferentes Comunidades Autónomas.

En esta segunda edición del cuarto volumen de problemas se han mejorado los gráficos, se ha aumentado el tamaño de los subíndices para hacerlos más visibles y se ha incorporado alguna nueva solución que era mejor que la que nosotros escribimos en la primera edición, además de, por supuesto, haber corregido alguna pequeña errata que allí nos pasó desapercibida.

Además del índice cronológico, en el que los problemas aparecen ordenados según el año de celebración de la Oposición y la Comunidad en la que fueron propuestos, se ha modificado y precisado el índice temático de problemas, en el que el lector podrá seleccionar todos aquellos problemas referidos a un mismo concepto matemático en los que podrá percibir líneas maestras de demostración que son comunes a muchos problemas parecidos a los tratados.

Algunos de los problemas que aparecen en el libro ya fueron propuestos en anteriores convocatorias y figuran resueltos en los volúmenes 1, 2 ó 3 de la colección *Problemas de Oposiciones. Matemáticas* (véanse las Publicaciones del final del libro). En tales casos hemos optado por remitir al lector al volumen de los anteriores en el que figura resuelto el problema, o bien, por presentar una solución alternativa cuando contiene ideas sustancialmente diferentes a las expuestas en el volumen citado.

En los problemas propuestos por primera vez entre 1996 y 2005 presentamos más de una solución completa en muchos de ellos y, para que el lector no tenga que recurrir a terceros libros, se incluyen unas Observaciones al final de cada problema en la que se enuncian y, eventualmente, se demuestran aquellos resultados que han sido utilizados en la resolución del problema. El lector no debe asustarse por la longitud de alguna de las soluciones propuestas, y es que nuestro empeño en explicar con rigor todo lo que necesita ser explicado provoca que ciertas soluciones se extiendan algo más de lo habitual. Diríase que no nos ha importado sacrificar espacio en aras de la claridad.

Aquellos problemas con enunciado ambiguo han sido resueltos en todos los casos a los que nuestra imaginación ha podido llegar y en otros (afortunadamente pocos) en los que se pide probar algo que no puede deducirse de los datos del problema, hemos buscado algún contraejemplo sencillo que certifique lo que se afirma.

Por último, queremos agradecer la colaboración de todos aquéllos que han contribuido a que esta segunda edición mejore a la primera. Agradecemos las contribuciones de Fernando García Pérez, Silvia Leal Pardo, José Ledesma Muñoz-Redondo, Manuel López Olmedo, Francisco Padilla Garví, Jorge Quereda Laviña y, en especial, las de Bruno Salgueiro, ninguno de los cuales tiene la más mínima responsabilidad en las deficiencias que con toda seguridad encontrará el lector en el libro y que son achacables en exclusiva a los autores.

Madrid, Marzo 2014

LOS AUTORES

Índice cronológico de problemas

Año 1994

Año 1996

Año 1997

Año 1998

Año 1999

Año 2000

Año 2001

Año 2002

Año 2003

Año 2004

Año 2005

Índice temático de problemas

Números y combinatoria

Álgebra

Cálculo diferencial

Cálculo integral

Geometría

Estadística y probabilidad

98.1. Determine el número complejo

$$A = 1 + z + z^4 + z^9 + z^{16} + z^{25} + z^{36}$$

donde $z = e^{2\pi i/7}$.

(Andalucía)

Solución:

La expresión de A puede simplificarse si se tiene en cuenta que z es una de las raíces séptimas de la unidad, esto es, $z^7 = 1$. Puede escribirse por ello:

$$z^9 = z^7 \cdot z^2 = z^2, \qquad z^{16} = \left(z^7\right)^2 \cdot z^2 = z^2$$

$$z^{25} = z^9 \cdot z^{16} = z^4, \qquad z^{36} = \left(z^7\right)^5 \cdot z = z$$

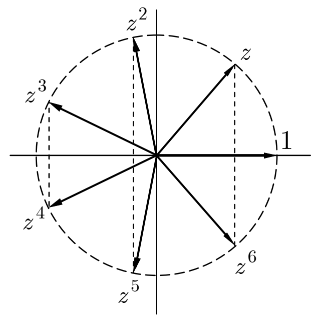
resultando así la siguiente expresión para A:

$$A = 1 + z + z^4 + z^2 + z^2 + z^4 + z = 1 + 2\left(z + z^2 + z^4\right)$$

Para determinar el valor de $z + z^2 + z^4$ repárese en que, por ser $z \neq 1$, es

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0 \tag{1}$$

Esta igualdad puede "ajustarse" a la expresión obtenida para A si se repara en que las seis raíces séptimas de la unidad distintas de ésta son conjugadas dos a dos. En concreto:



$$z^4 = e^{8\pi i/7} = e^{-6\pi i/7} = \overline{z}^3$$

$$z^5 = e^{10\pi i/7} = e^{-4\pi i/7} = \overline{z}^2$$

$$z^6 = e^{12\pi i/7} = e^{-2\pi i/7} = \overline{z}$$

Si usamos las propiedades de la conjugación, la igualdad (1) puede escribirse:

$$1 + \left(z + z^2 + z^4\right) + \overline{z + z^2 + z^4} = 0$$

o lo que es igual, $1 + 2\ \mathrm{Re}\left(z + z^2 + z^4\right) = 0$, y por tanto,

$$\mathrm{Re}\left(z + z^2 + z^4\right) = -\tfrac{1}{2} \tag{2}$$

por lo que sólo necesitamos ya calcular $\mathrm{Im}\left(z + z^2 + z^4\right)$. Recurrimos para ello al módulo de $z + z^2 + z^4$:

$$\left|z + z^2 + z^4\right|^2 = \left(z + z^2 + z^4\right) \cdot \overline{\left(z + z^2 + z^4\right)} = \left(z + z^2 + z^4\right) \cdot \left(z^6 + z^5 + z^3\right) =$$

$$= z^7 + z^6 + z^4 + z^8 + z^7 + z^5 + z^{10} + z^9 + z^7 =$$

$$= 1 + z^6 + z^4 + z + 1 + z^5 + z^3 + z^2 + 1 = 2$$

y por tanto:

$$\left|z + z^2 + z^4\right| = \sqrt{2} \tag{3}$$

De (2) y (3) se sigue entonces que:

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left[\mathrm{Im}\left(z + z^2 + z^4\right)\right]^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left[\mathrm{Im}\left(z + z^2 + z^4\right)\right]^2 = \tfrac{7}{4}$$

Para deducir el signo de $\operatorname{Im}\left(z+z^2+z^4\right)$, basta tener en cuenta que

$$\operatorname{Im}\left(z+z^2+z^4\right)=\operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{7}+\operatorname{sen}\tfrac{4\pi}{7}+\operatorname{sen}\tfrac{8\pi}{7}=\left(\operatorname{sen}\tfrac{2\pi}{7}-\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{7}\right)+\operatorname{sen}\tfrac{4\pi}{7}>0$$

por lo que $\operatorname{Im}\left(z+z^2+z^4\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}$. Por último

$$A=1+2\left(z+z^2+z^4\right)=1+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right)=i\sqrt{7}$$

00.18. Los cuatro primeros términos de la sucesión $\left(a_n\right)$ de números reales son $a_0=a_1=a_2=a_3=0$ y su ley de recurrencia es, para $n\geq 0$

$$a_{n+4}+a_{n+3}+2a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=12n$$

Determine el término general de la sucesión en función de n y calcule el término a_{90}.

INDICACIÓN: $x^4+x^3+2x^2+x+1=\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

(Madrid)

Solución:

La ley de recurrencia de $\left(a_n\right)$ define una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes. Su solución general se obtiene sumando una solución particular de la misma y la solución general de la homogénea.

Para determinar la solución general de la ecuación homogénea $a_{n+4}+a_{n+3}+2a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0$, recurrimos a su ecuación característica

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)=0$$

Las cuatro soluciones de esta ecuación son $\cos\frac{\pi}{2} \pm i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ y dan la solución general de la homogénea, que es:

$$c_0\cos\frac{n\pi}{2} + c_1\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + c_2\cos\frac{2n\pi}{3} + c_3\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}$$

Buscamos una solución particular de la ecuación completa usando coeficientes indeterminados. El término independiente de la ecuación completa, $12n$, es de la forma $p(n)\cdot s^n$, con $p(n) = 12n$ y $s = 1$. Además, $s = 1$ no es raíz de la ecuación característica de la homogénea, y por tanto puede encontrarse como solución particular un polinomio del mismo grado a lo sumo que $12n$, es decir, de grado menor o igual que uno. Sea $a_n = a + bn$ dicho polinomio. Sustituyendo en la completa resulta:

$$a + b(n+4) + a + b(n+3) + 2a + 2b(n+2) + a + b(n+1) + a + bn = 12n$$

es decir, $6a + 12b + 6bn = 12n$. Identificando coeficientes resulta $a = -4$, $b = 2$, y la solución particular es $a_n = -4 + 2n$. La solución general de la ecuación completa es por tanto:

$$a_n = -4 + 2n + c_0\cos\frac{n\pi}{2} + c_1\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + c_2\cos\frac{2n\pi}{3} + c_3\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}$$

Teniendo en cuenta que los cuatro primeros términos son nulos se determinan los c_i. Resultan de esta forma $c_0 = 0$, $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ y entonces

$$a_n = -4 + 2n + 6\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + 4\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}$$

El término que ocupa el lugar 90 en la sucesión es:

$$a_{90} = -4 + 180 + 6\operatorname{sen}45\pi + 4\cos 60\pi - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}60\pi = -4 + 180 + 4 = 180$$

98.33. Se considera la familia de elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que pasan por el punto $(1,1)$.

a) Determine la elipse de la familia que encierra una región de área mínima.

b) Determine la elipse de la familia que engendra un volumen mínimo al girar alrededor del eje de abscisas.

(Cataluña)

El apartado b) figura resuelto en [Vol. 3] pág. 176.

Solución:

a) Las elipses de la familia son las que tienen por ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y pasan por $(1,1)$, es decir, aquellas en las que a y b cumplen $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$.

El área que encierra la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, teniendo en cuenta la simetría de la misma respecto de ambos ejes de coordenadas, es cuatro veces el área bajo la gráfica de la función $x\mapsto b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ entre $x=0$ y $x=a$, es decir,

$$S=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

Mediante el cambio de variable $x=a\operatorname{sen}t$, obtenemos:

$$S=4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot a\cos t\,dt=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=$$

$$= 4ab \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = 2ab \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_0^{\pi/2} = \pi ab$$

Se trata en consecuencia de minimizar πab , o lo que es igual, minimizar ab con a y b positivos y tales que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. Pero minimizar el producto de factores positivos ab equivale a minimizar $a^2 b^2$, que a su vez es equivalente a maximizar $\frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}$. Debemos por tanto calcular el máximo de la función $\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}$ sabiendo que $a, b > 0$ y $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.

Ahora bien, es conocido que el máximo de un producto de dos factores positivos de suma constante se alcanza cuando ambos factores son iguales. De aquí que en el máximo ocurre que $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$ y, como son $a, b > 0$, necesariamente $a = b$ y de la igualdad $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ se deduce que $\frac{2}{a^2} = 1$, luego $a = b = \sqrt{2}$. La elipse de área mínima es, por tanto, la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$, de centro el origen y radio $\sqrt{2}$, cuya área es 2π.

b) El volumen que engendra la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ al girar alrededor del eje de abscisas es

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2 \right) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

Hay que minimizar $\frac{4}{3}\pi a b^2$, es decir, ab^2, con las restricciones $a > 0$, $b > 0$ y $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. Esta última igualdad obliga a que $\frac{1}{a^2}$ y $\frac{1}{b^2}$ sean menores que 1, y como a y b son positivos, ambos han de ser mayores que 1. Como de la misma igualdad deducimos que $b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1}$, la función a minimizar es:

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}:a\mapsto f(a)=a\cdot\frac{a^2}{a^2-1}=\frac{a^3}{a^2-1}$$

Por ser $a^2-1>0$ siempre que $a>1$, f es derivable y su derivada es

$$f'(a)=\frac{a^4-3a^2}{\left(a^2-1\right)^2}=\frac{a^2\left(a+\sqrt{3}\right)\left(a-\sqrt{3}\right)}{\left(a^2-1\right)^2}$$

El único cero de f' en el intervalo $(1,+\infty)$ es $a=\sqrt{3}$. Como $f'<0$ en el intervalo $\left(1,\sqrt{3}\right)$ y $f'>0$ en el intervalo $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, f presenta un único mínimo absoluto en $a=\sqrt{3}$. Para dicho valor de a es $b^2=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}$ y por tanto $b=\frac{\sqrt{6}}{2}$. La elipse que engendra el menor volumen al girar alrededor de OX es así la centrada en el origen y de semiejes $\sqrt{3}$ y $\frac{\sqrt{6}}{2}$, y dicho volumen mínimo es $\frac{4}{3}\pi\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=2\pi\sqrt{3}$.

00.50. Se realiza un juego entre dos jugadores A y B que ganará aquél que gane dos partidas. La probabilidad de que el jugador A gane una partida es p, la probabilidad de que el jugador B gane una partida es q, y la probabilidad de que una partida termine en tablas (empate) es r. Calcule la probabilidad de que el jugador A gane el juego.

(Galicia)

Primera solución:

Sea A_n el suceso: "*A gana el juego en la partida n-ésima*" $(n\geq 2)$. Es evidente que $p(A_2)=p^2$, mientras que si $n\geq 3$, el suceso A_n ocurre sólo si se da alguna de las dos situaciones excluyentes que siguen:

- En las $n-1$ primeras partidas se producen una victoria de A y $n-2$ tablas, y en la n-ésima gana A. Como la única victoria de A en las $n-1$ primeras partidas puede darse en cualquiera de ellas, la probabilidad de este suceso es

$$(n-1)\,pr^{n-2}p = (n-1)\,p^2r^{n-2}$$

- A gana una partida, B otra y se producen $n-3$ tablas en las $n-1$ primeras partidas, y A gana la última. La primera victoria de A puede ocurrir en cualquiera de las $n-1$ primeras partidas y, fijada ésta, la victoria de B puede darse en cualquiera de las $n-2$ partidas restantes. Deducimos de ello que la probabilidad de que esto ocurra es

$$(n-1)(n-2)\,pqr^{n-3}p = (n-1)(n-2)\,p^2qr^{n-3}$$

La probabilidad de que A gane el juego en la partida n-ésima $(n \geq 3)$ es por tanto la suma de las dos probabilidades anteriores:

$$p(A_n) = (n-1)\,p^2r^{n-2} + (n-1)(n-2)\,p^2qr^{n-3}$$

y la probabilidad de que A gane el juego es entonces:

$$p(A) = p(A_2) + \sum_{n=3}^{\infty} p(A_n) =$$

$$= p^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n-1)\,p^2r^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)\,p^2qr^{n-3} =$$

$$= p^2\left(1 + \sum_{n=3}^{\infty}(n-1)\,r^{n-2} + q\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)\,r^{n-3}\right)$$

Para el cálculo de la suma de las dos series anteriores, podemos recurrir a la derivación sucesiva de la suma de la serie geométrica $\sum_{n=3}^{\infty} r^{n-1}$. Las series de potencias como la anterior pueden ser derivadas término a término en el interior de su campo de convergencia. Como dicha serie sólo converge si es $|r| < 1$, se tiene para tales valores de r,

$$\sum_{n=3}^{\infty} r^{n-1} = \frac{r^2}{1-r} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=3}^{\infty} (n-1) r^{n-2} = \frac{d}{dr}\left(\sum_{n=3}^{\infty} r^{n-1}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{1-r}\right) = \frac{2r - r^2}{(1-r)^2}$$

Volviendo a derivar la serie anterior para los mismos valores de r, se tiene:

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2) r^{n-3} = \frac{d}{dr}\left(\sum_{n=3}^{\infty} (n-1) r^{n-2}\right) = \frac{d}{dr}\left[\frac{2r - r^2}{(1-r)^2}\right] = \frac{2}{(1-r)^3}$$

y entonces:

$$p(A) = p^2\left[1 + \frac{2r - r^2}{(1-r)^2} + q\frac{2}{(1-r)^3}\right] = \frac{p^2(1+2q-r)}{(1-r)^3}$$

probabilidad que, por ser $p + q + r = 1$, puede ser escrita en la forma:

$$p(A) = \frac{p^2(p+3q)}{(p+q)^3}$$

Segunda solución:

Llamemos p_{ij} a la probabilidad que tiene A de ganar el juego después de que A haya ganado i partidas y B haya ganado j partidas. Según esta notación debemos calcular p_{00} y es evidente que $p_{2j} = 1$ y $p_{i2} = 0$, para $i, j \in \{0,1\}$. Distingamos según el resultado de la primera partida:

- Si A gana esta primera partida, cosa que hace con probabilidad p, a partir de entonces tiene una probabilidad igual a p_{10} de ganar el juego.

- Si B ha ganado la primera partida, hecho que ocurre con probabilidad q, entonces A tiene una probabilidad igual a p_{01} de ganar el juego.

- Por último, empatan la primera partida con probabilidad $r = 1 - p - q$, y desde ese momento A tiene una probabilidad igual a p_{00} de ganar.

Resulta entonces, como consecuencia del *teorema de la probabilidad total*, que

$$p_{00} = p \cdot p_{10} + q \cdot p_{01} + (1 - p - q) \cdot p_{00}$$

es decir,

$$(p + q) \cdot p_{00} = p \cdot p_{10} + q \cdot p_{01} \tag{1}$$

Razonamientos similares a éste para las probabilidades p_{10}, p_{01} y p_{11} permiten obtener:

$$\begin{aligned} p_{10} &= p \cdot p_{20} + q \cdot p_{11} + (1 - p - q) \cdot p_{10} \\ p_{01} &= p \cdot p_{11} + q \cdot p_{02} + (1 - p - q) \cdot p_{01} \\ p_{11} &= p \cdot p_{21} + q \cdot p_{12} + (1 - p - q) \cdot p_{11} \end{aligned}$$

Después de simplificar las igualdades anteriores y unirlas a la (1), se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} (p + q) \cdot p_{00} = p \cdot p_{10} + q \cdot p_{01} \\ (p + q) \cdot p_{10} = p + q \cdot p_{11} \\ (p + q) \cdot p_{01} = p \cdot p_{11} \\ (p + q) \cdot p_{11} = p \end{cases}$$

La solución del sistema puede ser obtenida con facilidad de abajo hacia arriba, y es:

$$p_{11} = \frac{p}{p+q}\,, \qquad p_{01} = \frac{p^2}{(p+q)^2}\,, \qquad p_{10} = \frac{p^2+2pq}{(p+q)^2}$$

y por último

$$p_{00} = \frac{1}{p+q}\left[p\cdot\frac{p^2+2pq}{(p+q)^2} + q\cdot\frac{p^2}{(p+q)^2}\right] = \frac{p^2\,(p+3q)}{(p+q)^3}$$

PUBLICACIONES

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 1: 1969 a 1980. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Tercera edición. I.S.B.N. 978-84-86379-33-9.
  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.
  Obra dedicada a la resolución, con todo detalle, de los 509 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 592 pág., ofreciéndose dos métodos de resolución cuando se ha considerado oportuno.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 2: 1981 a 1987. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. I.S.B.N. 978-84-86379-36-0.
  Autores: Braulio de Diego y Elías J. Gordillo.
  Contiene, en 768 páginas, 773 problemas totalmente[1] resueltos que fueron propuestos en las citadas oposiciones, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 3: 1988 a 1995. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. I.S.B.N. 978-84-86379-34-6.
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena y Mariano Llerena.
  Contiene totalmente[1] resueltos 551 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 672 pág., convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 4: 1996 a 2005. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. I.S.B.N. 978-84-86379-86-5.
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa y José Mª Lorenzo.
  Contiene totalmente[1] resueltos 378 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 1004 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías.

- **PROBLEMAS DE OPOSICIONES. Tomo 5: 2006 a 2012. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  I.S.B.N. 978-84-86379-85-8
  Autores: Braulio de Diego, Agustín Llerena, Francisco Baena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.
  Contiene totalmente[1] resueltos 177 problemas propuestos en las citadas oposiciones, en 650 páginas, convocadas tanto por el M.E.C. como por diferentes Autonomías

- **TEMAS DE OPOSICIONES A PROFESOR DE ENSEÑANZA SECUNDARIA. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
  Segunda edición. Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-48-3. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-47-6. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-49-0.

---

[1] Los problemas propuestos en convocatorias de años anteriores no se resuelven otra vez, sino que se indica un volumen de la misma colección donde figuran resueltos.

Autores: Braulio de Diego, Francisco Padilla y Agustín Llerena.
Obra de 3 volúmenes en la que se desarrollan todos los temas del Temario de Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria, especialidad de Matemáticas

- **PROGRAMACIONES Y UNIDADES DIDÁCTICAS. Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria. Matemáticas.**
Tomo 1, I.S.B.N. 978-84-86379-74-2. Tomo 2, I.S.B.N. 978-84-86379-75-9. Tomo 3, I.S.B.N. 978-84-86379-76-6. Tomo 4, 978-84-86379-77-3.
Autores: Fernando García, Antonio J. López, Manuel López, José Mª Lorenzo, Jorge Quereda, Manuela Redondo y Mª Teresa Sánchez
Figuran desarrolladas las programaciones de las asignaturas de Matemáticas de 1º y 2º de E.S.O. en el Tomo 1; 3º y 4º (Opciones A y B) de E.S.O. en el Tomo 2; las Matemáticas I y II del Bachillerato de Ciencias y Tecnología en el Tomo 3; y las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II en el Tomo 4. Además, con cada programación se desarrollan al menos quince unidades didácticas.

- **PROBLEMAS DE ÁLGEBRA LINEAL. Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.**
Cuarta edición. I.S.B.N. 978-84-86379-00-1.
Autores: Braulio de Diego, Elías J. Gordillo y Gerardo Valeiras.
Obra dirigida por José Luis Vicente Córdoba (Catedrático de Álgebra de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla). Contiene 427 problemas totalmente resueltos y más de 848 cuestiones. Cada capítulo se inicia con un resumen teórico.
Capítulo 1: Matrices. Operaciones elementales. Determinantes. Matriz inversa. Rango o característica de una matriz. Sistemas de ecuaciones lineales: método de reducción de Gauss. Capítulo 2: Espacios vectoriales. Subespacios. Dependencia lineal. Espacio cociente. Base y dimensión. Coordenadas. Cambio de base. Escalonamiento de vectores. Aplicaciones del Teorema de Rouché-Fröbenius. Capítulo 3: Aplicaciones lineales. Núcleo e imagen. Matrices asociadas a una aplicación lineal. Formas lineales. Espacio dual. Capítulo 4: Autovectores y autovalores. Polinomios característico y mínimo. Matrices diagonalizables. Diagonalización de matrices simétricas reales. Formas canónicas de Jordan: métodos de la partición de multiplicidades y de los divisores elementales. Aplicaciones.

- **EJERCICIOS DE ANÁLISIS (CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL). Primer curso de Escuelas Técnicas, Escuelas Universitarias y Facultades de Ciencias.**
Quinta edición. I.S.B.N. 978-84-86379-02-5.
Autor: Braulio de Diego.
Capítulo 1: Interpolación. Capítulo 2: Sucesiones y topología en la recta real. Límites. Capítulo 3: Números complejos. Transformaciones. Capítulo 4: Límites y continuidad de funciones reales de variable real. Capítulo 5: Derivada y diferencial.
Capítulo 6: Teoremas del valor medio. Regla de L'Hôpital. Fórmulas de Taylor y Mac Laurin. Curvas. Capítulo 7: Cálculo de primitivas. Integral definida. Integrales impropias. Convergencia. Capítulo 8: Series numéricas. Sucesiones y series funcionales. Convergencia uniforme. Desarrollos en series de potencias. Capítulo 9: Ecuaciones algebraicas. Aproximación de raíces. Eliminación de incógnitas.

Distribución y pedidos a:

Editorial DEIMOS
Glorieta del Puente de Segovia, n.º 3
28011 MADRID
Teléfonos: 91 479 23 42 y 669 31 64 06
www.academiadeimos.es editorial@academiadeimos.es