DEIMOS
Oposiciones a Profesores de Secundaria
Oposiciones a Diplomados en Estadística del Estado
C/ Fernández de los Ríos 75
28015 MADRID
☎ 669 31 64 06
www.academiadeimos.es
http://academiadeimos.blogspot.com.es
editorial@ academiadeimos.es
academia@ academiadeimos.es

Algunos problemas propuestos en las Oposiciones a Profesor de Enseñanza Secundaria en la asignatura de Matemáticas. Junio 2014

Problema 1: Determine una función derivable $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ tal que $f(1)=1$, $f(2)=7$ y tal que para cada $x\in[0,2]$ sea

$$3\int_0^x f(t)\,dt=\left(f(x)+2f(0)\right)x$$

(Aragón, Junio 2014)

Un problema muy similar a éste es el 05.32 del volumen 4 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES DE MATEMÁTICAS de Editorial Deimos, y que fue propuesto en la Comunidad de las Islas Baleares en Junio de 2005.

Solución:

La función f es continua en el intervalo $[0,2]$, por ser derivable en dicho intervalo, así que la función $x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$ es, por el *Teorema fundamental del Cálculo*, derivable en cada $x\in[0,2]$, siendo:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=f(x)$$

Podemos por tanto derivar en la igualdad del enunciado, obteniendo, para cada $x\in[0,2]$, que

$$3f(x)=x\,f'(x)+f(x)+2f(0)$$

es decir,

$$2\left(f(x)-f(0)\right)=x\,f'(x) \tag{1}$$

En particular, para cada $x \in (0,2]$ es:

$$f'(x) = 2\frac{f(x) - f(0)}{x}$$

lo que garantiza, por ser f derivable en $(0,2]$, que también f' es derivable en $(0,2]$. Derivando entonces en (1) se tiene, para $x \in (0,2]$, que

$$2f'(x) = f'(x) + x\,f''(x)$$

es decir,

$$f'(x) = x\,f''(x) \tag{2}$$

La última igualdad, cierta para todo $x \in (0,2]$, puede ser escrita en la forma

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{x}$$

y demuestra, por ser f' derivable en $(0,2]$, que también lo es f'', de modo que al derivar en ella obtenemos:

$$f''(x) = f''(x) + x\,f'''(x)$$

o lo que es igual,

$$x\,f'''(x) = 0$$

para cada $x \in (0,2]$. Por tanto, es $f'''(x) = 0$, para cada $x \in (0,2]$ y de ello se deduce que f'' es constante en el intervalo $(0,2]$, pongamos $f''(x) = c$. Sustituyendo en (2) obtenemos que

$$f'(x) = x\,f''(x) = cx$$

para cada $x \in (0,2]$ y, al sustituir en (1) deducimos que:

$$2\left(f(x) - f(0)\right) = cx^2$$

es decir,

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}cx^2 \tag{3}$$

para cada $x \in (0,2]$. Como son $f(1) = 1$ y $f(2) = 7$, al sustituir en la igualdad anterior se deduce que

$$f(0)+\frac{c}{2}=1\,, \qquad f(0)+2c=7$$

Al restar ambas igualdades se obtiene que $\frac{3c}{2}=6$, es decir, $c=4$, y al sustituir en la segunda igualdad, $f(0)=-1$. Sustituyendo en (3) se tiene que, para cada $x\in(0,2]$ es $f(x)=-1+2x^2$ y como también es $f(0)=-1=-1+2\cdot 0^2$, resulta que la función buscada es la función $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=-1+2x^2$$

OBSERVACIÓN: La tesis del problema permanece cierta si la función f de partida es sólo continua, pues la continuidad de f en el intervalo [0,2] y la igualdad del enunciado implican la derivabilidad de f en el intervalo (0,2], que es todo lo que se ha utilizado para determinar f.

Problema 2: Calcule el valor del determinante:

$$A_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

(Aragón, Junio 2014)

Este problema figura resuelto en la página 310 del volumen 2 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES DE MATEMÁTICAS (1981-1987), de Editorial Deimos, y fue propuesto en Madrid en Junio de 1983.

Problema 3: Si de una urna que sólo contiene bolas blancas y bolas negras, idénticas salvo en el color, extraemos dos bolas al azar sin reemplazamiento, la probabilidad de que ambas sean blancas es $\frac{1}{2}$.

a) Determine el número mínimo de bolas que contiene la urna.

b) Determine el número mínimo de bolas que contiene la urna, sabiendo que el número de bolas negras es par.

(Aragón, Junio 2014)

Este problema, cambiando calcetines por bolas, es el problema 06.86 del volumen 5 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES de Editorial Deimos y allí figura resuelto. Fue propuesto en Castilla-La Mancha en Junio de 2006. Un problema muy similar a éste es el 06.90 del citado volumen 5, que fue propuesto en las Islas Baleares en Junio de 2006.

Problema 4: Calcule todos los $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ tales que la suma de cualquiera de sus componentes con el producto de las otras tres dé como resultado 2.

(Galicia, Junio 2014)

Solución:

Debe resolverse en $\mathbb{R}^4$ el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + yzu = 2 \\ y + zux = 2 \\ z + uxy = 2 \\ u + xyz = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Sea, pues, $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ una solución del sistema. Si alguna de las cuatro incógnitas fuese nula, pongamos $x = 0$, las cuatro ecuaciones serían $yzu = 2$, $y = 2$, $z = 2$, $u = 2$, que dan lugar a un sistema sin solución. El estudio es idéntico caso de que y, z o w fuesen nulos, dada la simetría del sistema respecto de sus incógnitas. Por tanto, son $x, y, z, u \neq 0$ y podemos por ello multiplicar la primera ecuación por x, la segunda por y, la tercera por z y la cuarta por u, resultando el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^2 + xyzu = 2x \\ y^2 + xyzu = 2y \\ z^2 + xyzu = 2z \\ u^2 + xyzu = 2u \end{cases} \tag{2}$$

- Si fueran $x = y = z = u$, la primera ecuación del sistema (2) anterior sería $x^2 + x^4 = 2x$, ecuación equivalente a $x + x^3 = 2$, es decir, a $x^3 + x - 2 = 0$, por ser $x \neq 0$. Ahora bien, $x = 1$ es la única solución real de esta ecuación, pues $x^3 + x - 2 = (x-1)\left(x^2 + x + 2\right)$ y la ecuación $x^2 + x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales. Por tanto, $x = y = z = u = 1$ y la única solución del sistema con sus cuatro componentes iguales es $(x, y, z, u) = (1,1,1,1)$.

- Supongamos que hay dos coordenadas distintas, por ejemplo, $x \neq y$. Entonces, de las dos primeras ecuaciones de (2) se deduce que $2x - x^2 = 2y - y^2$, es decir, $2(x - y) = (x + y)(x - y)$ y como es $x - y \neq 0$, entonces $x + y = 2$. De la primera ecuación del sistema (1) deducimos que $yzu = y$, lo equivale, por ser $y \neq 0$, a la igualdad $zu = 1$, de modo que las dos últimas ecuaciones de (1) se escriben:

$$\begin{cases} z + \frac{1}{z} xy = 2 \\ \frac{1}{z} + xyz = 2 \end{cases}$$

Si ahora se multiplica la primera ecuación por $z^3 \neq 0$ y la segunda por $z \neq 0$, resulta el sistema

$$\begin{cases} z^4 + xyz^2 = 2z^3 \\ 1 + xyz^2 = 2z \end{cases}$$

Al eliminar el término xyz^2 de ambas igualdades se deduce que:

$$z^4 - 2z^3 = 1 - 2z \quad \Leftrightarrow \quad z^4 - 2z^3 + 2z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z^4 - 1\right) - \left(2z^3 - 2z\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right) - 2z\left(z^2 - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1 - 2z\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z^2 - 1\right)\left(z - 1\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z - 1\right)^3\left(z + 1\right) = 0$$

cuyas únicas soluciones son $z = 1$ y $z = -1$. Si fuera $z = 1$, como es $uz = 1$, también sería $u = 1$ y las cuatro ecuaciones de (1) quedarían reducidas al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

según el cual, x e y son las soluciones de la ecuación $t^2 - 2t + 1 = 0$, es decir, serían $x = y = 1$, pero esto es imposible, pues $x \neq y$. Por tanto, necesariamente es $z = -1$, en cuyo caso también es $u = \frac{1}{z} = -1$, quedando el sistema inicial (1) reducido al siguiente:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -1 - xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$$

según el cual, x e y son las soluciones de la ecuación $t^2 - 2t - 3 = 0$, y por tanto, $x = -1$, $y = 3$, o bien, $x = 3$, $y = -1$, obteniendo como únicas soluciones en este caso del sistema original $(x,y,z,u) = (-1,3,-1,-1)$ y $(x,y,z,u) = (3,-1,-1,-1)$.

Por evidente simetría, si se suponen $x \neq z$, $x \neq u$, $y \neq z$, $y \neq u$ o $z \neq u$, tan sólo se añaden dos soluciones más: $(x,y,z,u) = (-1,-1,3,-1)$ y $(x,y,z,u) = (-1,-1,-1,3)$.

En resumen, el problema sólo tiene las cinco soluciones $(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4$ siguientes:

$$(1,1,1,1),\ (3,-1,-1,-1),\ (-1,3,-1,-1),\ (-1,-1,3,-1),\ (-1,-1,-1,,3)$$

Problema 5: Dada la ecuación $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$, con $m \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Discuta las soluciones de la ecuación al variar el parámetro m.

b) Resuelva la ecuación en función de m.

(Galicia, Junio 2014)

Este problema figura resuelto en la página 82 del volumen 5 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES de Editorial Deimos y fue propuesto en Asturias en Junio de 2006. También figura resuelto de forma diferente a la del volumen 5 en la página 568 del volumen 1 de los citados PROBLEMAS DE OPOSICIONES, después de ser propuesto en la Oposición a Cátedras en Madrid en Junio de 1979.

Problema 6: Un punto móvil P describe una parábola $y^2 = 2x$, con velocidad de 5 cm/s, pasando primero por el origen O y luego por el punto $M(2,2)$. En el punto $A(6,0)$ hay un foco luminoso y se pregunta: ¿A qué velocidad se moverá sobre el eje OY la sombra del punto P cuando éste pase por M ?

Este problema figura resuelto en la página 21 del volumen 2 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES de Editorial Deimos y fue propuesto en Madrid en Junio de 1981.

(Galicia, Junio 2014)

Problema 7: Calcule el área encerrada en el lazo de la curva $\mathcal{C}$ de ecuación

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

(Madrid, Junio 2014)

Este problema fue propuesto en Cataluña en 1983 y es parte del problema 83.63 del volumen 2 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES de Editorial Deimos, en el que, además del área que encierra el lazo de la curva, se pide una representación gráfica de la misma. Este problema es también un caso particular del problema 87.66 del mismo volumen, que fue propuesto en Valencia en 1987.

Solución:

Calcularemos el área que encierra el bucle de la curva $\mathcal{C}$ (llamada *Folium de Descartes*) a partir de unas ecuaciones paramétricas de $\mathcal{C}$, ecuaciones que pueden obtenerse reparando en que la ecuación de la curva sólo contiene términos de dos grados consecutivos (dos y tres) y en que, por ello, admitirá una parametrización $t \mapsto (x(t), y(t))$ tal que $y(t) = t \cdot x(t)$.

Veamos: si (x,y) un punto de la curva $\mathcal{C}$ y es $x = 0$, entonces $y^3 = 0$ y por tanto, $y = 0$; si, en cambio, es $x \neq 0$, llamando $t = \frac{y}{x}$, podemos poner $y = tx$, y como $(x,tx) \in \mathcal{C}$ y $x \neq 0$, se tiene: $y \neq 0, t \neq -1$ y

$$x^3+(tx)^3-3x(tx)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3+t^3x^3-3tx^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+t^3x-3t=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(1+t^3\right)=3t \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3t}{1+t^3}, \quad y=tx=\frac{3t^2}{1+t^3}$$

La curva $\mathcal{C}$ admite, por tanto, la parametrización:

$$(x(t),y(t))=\left(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\right), \qquad \text{para } t\neq -1$$

cuya imagen incluye al origen $(0,0)$, sin más que hacer $t=0$. Como además es:

$$\lim_{t\to+\infty}(x(t),y(t))=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\right)=(0,0),$$

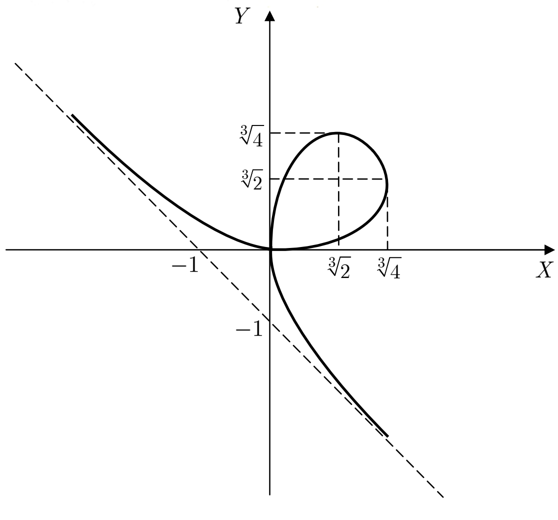
el lazo de la curva se recorre desde $t=0$ hasta $t\to+\infty$, de manera que el área que encierra dicho lazo es:

$$S=\left|\int_0^{+\infty}y(t)x'(t)\,dt\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{3t^2}{1+t^3}\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\,dt\right|=3\left|\int_0^{+\infty}\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^3}3t^2dt\right|$$

Si en la última integral se cambia $1+t^3=u$, $u\geq 1$, entonces es $3t^2dt=du$ y $1-2t^3=1-2(u-1)=3-2u$, de modo que:

$$S=3\left|\int_1^{+\infty}\frac{3-2u}{u^3}\,du\right|=3\left|\left[-\frac{3}{2u^2}+\frac{2}{u}\right]_1^{+\infty}\right|=3\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2} \text{ unidades de área}$$

La gráfica de $\mathcal{C}$ es, aproximadamente, la que figura a la derecha, y los cálculos necesarios para llegar a su dibujo pueden consultarse en la página 338 del citado volumen 2 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES de Editorial Deimos.



Problema 8: Un segmento rectilíneo AB de longitud L se apoya sobre los semiejes coordenados positivos.

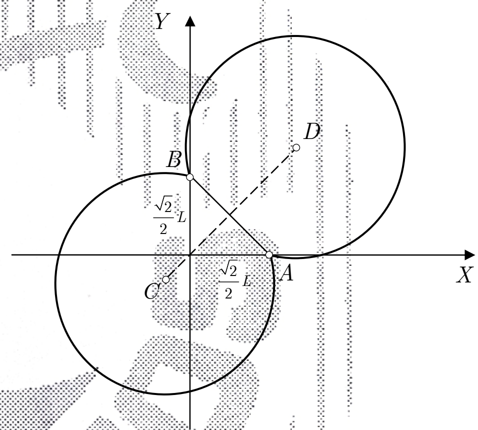
a) Determine el lugar geométrico de los puntos desde los que se ve el segmento AB bajo un ángulo de 30^o cuando dicho segmento forma un triángulo isósceles en el primer cuadrante.

b) Si son $A(1,0)$ y $B(0,1)$, determine el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras que pasan por A, por B y por el origen de coordenadas.

(Madrid, Junio 2014)

El apartado b) es el problema 04.4 del volumen 4 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES de Editorial Deimos y también figura resuelto en la página 62 del volumen 2 de la misma colección. Han sido propuestos en Extremadura en 2004 y en Madrid en 1981.

Solución de a):



El lugar geométrico solución es el arco capaz de ángulo 30^o sobre el segmento de extremos $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L,0\right)$ y $B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)$, esto es, la unión de dos arcos de circunferencia de extremos A y B, contenidos cada uno en distinto semiplano respecto de la recta AB y simétricos el uno del otro respecto de dicha recta.

Uno de los arcos tiene por centro el punto $C\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}L,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}L\right)$ y está contenido en el mismo semiplano que C respecto de la recta AB; el arco contenido en el otro semiplano respecto de AB tiene por centro el punto $D\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}L,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}L\right)$ y ambos arcos tienen radio común L.

Problema 9: Calcule los productos siguientes:

a) $\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{2k\pi i/n}-1\right)$

b) $\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}$

(Madrid, Junio 2014)

Este problema el 88.46 del volumen 3 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES, de Editorial Deimos y allí figura resuelto. Fue propuesto en Andalucía en Junio de 1988. Un problema muy similar a éste es el 10.2 del volumen 5 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES, que fue propuesto en Madrid en Junio de 2010.

Problema 10: Calcule

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

(Ceuta, Junio 2014)

Una solución:

Recurriendo a la integral euleriana gamma, esto es, a la función $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$$

cuyo valor en $p=\frac{1}{2}$ es $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, podemos, en la integral del enunciado, efectuar el cambio de variable $x^2=t$, para $t\in[0,+\infty)$, de forma que como es $x=\sqrt{t}$ y $dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, podemos escribir

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{-1/2}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Otra solución:

El cuadrado de la integral puede calcularse como una integral doble recurriendo al Teorema de Fubini y al cambio a coordenadas polares. Concretamente, si I es el valor de la integral del enunciado:

$$I^2=\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dx\right)dy=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\right)dy=\iint_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

Si ahora se utiliza el cambio a polares: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$, para $\rho\in(0,+\infty)$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, dado que el Jacobiano de la transformación es $|J|=\rho$, resulta que

$$I^2=\iint_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\rho e^{-\rho^2}d\theta\right)d\rho=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\rho e^{-\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty}=-\frac{\pi}{4}(0-1)=\frac{\pi}{4}$$

Y por tanto,

$$I=\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Problema 11: Se considera el polinomio con coeficientes complejos:

$$p(z)=z^3+(-6+5i)z^2+(9-24i)z+18+13i$$

a) Calcule $a,b,c\in\mathbb{C}$ para que $p(z)=(z+i)\left(az^2+bz+c\right)$, sea cual sea $z\in\mathbb{C}$.

b) Resuelva la ecuación $p(z)=0$.

c) Dibuje en el plano complejo el triángulo cuyos vértices son los afijos A_1 , A_2 y A_3 de las soluciones de la ecuación del apartado b).

d) ¿Qué tipo de triángulo es $A_1A_2A_3$?

Un problema idéntico a éste es el 90.62 del volumen 3 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES, de Editorial Deimos y allí figura resuelto. Muy parecido es el problema 04.60 del volumen 4 de la citada colección, que fue propuesto en Andalucía en 2004.

Solución:

a) Los números $a,b,c\in\mathbb{C}$ del enunciado existen si y sólo si la división de polinomios complejos $p(z):(z+i)$ es exacta. Efectuamos dicha división usando la *Regla de Ruffini*:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6+5i & 9-24i & 18+13i \\
-i & & -i & 4+6i & -18-13i \\
\hline
 & 1 & -6+4i & 13-18i & \boxed{0}
\end{array}
$$

Se deduce así que:

$$p(z)=(z+i)\big(z^2+(-6+4i)z+13-18i\big)$$

y por tanto, $a=1$, $b=-6+4i$, $c=13-18i$.

b) Una de las tres raíces del polinomio $p(z)$ es $z=-i$; las otras dos son las raíces del polinomio $z^2+(-6+4i)z+13-18i$, que son:

$$z=\frac{6-4i\pm\sqrt{(-6+4i)^2-4(13-18i)}}{2}=\frac{6-4i\pm\sqrt{-32+24i}}{2}=\frac{6-4i\pm2\sqrt{-8+6i}}{2}=$$

$$=3-2i\pm\sqrt{-8+6i}$$

Para determinar las dos raíces cuadradas de $-8+6i$, ponemos $\sqrt{-8+6i}=p+qi$, donde $p,q\in\mathbb{R}$, es decir,

$$(p+qi)^2=-8+6i \quad\Leftrightarrow\quad p^2-q^2+2pqi=-8+6i \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p^2-q^2=-8\\ pq=3\end{cases} \tag{1}$$

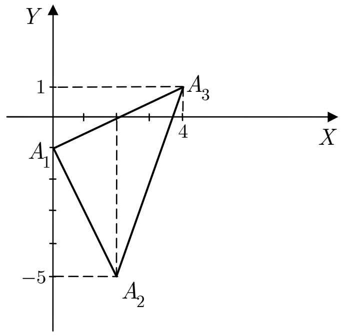
Ahora bien, como $|p+qi|^2=|-8+6i|$, será $p^2+q^2=|-8+6i|=10$, y al sumar esta igualdad con la primera de (1), se tiene que $2p^2=2$, es decir, $p=\pm1$. De la segunda ecuación de (1) se deduce que si $p=1$, entonces $q=3$, mientras que si $p=-1$, entonces $q=-3$. Por tanto, las otras dos raíces de $p(z)$ son:

$$z=3-2i\pm\sqrt{-8+6i}=3-2i\pm(1+3i)=\begin{cases}4+i\\ 2-5i\end{cases}$$

y las tres soluciones de la ecuación $p(z)=0$ son

$$z_1=-i,\qquad z_2=2-5i,\qquad z_3=4+i.$$

c) El triángulo que debe dibujarse es el de vértices $A_1(0,-1)$, $A_2(2,-5)$ y $A_3(4,1)$ que aparece en la figura adjunta.



d) Las raíces z_1, z_2 y z_3 cumplen que $z_2 - z_1 = 2 - 4i$ y $z_3 - z_1 = 4 + 2i$, de modo que

$$i(z_2 - z_1) = i(2 - 4i) = 4 + 2i = z_3 - z_1$$

es decir, el afijo A_3 es el transformado de A_2 mediante el giro de centro en A_1 y amplitud 90°. Esto se traduce en que el triángulo $A_1A_2A_3$ es rectángulo e isósceles.

Problema 12: Sean a, b, c y d números racionales y x un número irracional. Determine la condición que han de cumplir a, b, c y d para que la fracción

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

sea un número racional.

(Andalucía, Junio 2014)

Este problema es el 06.109 del volumen 5 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES, de Editorial Deimos y allí figura resuelto. Una solución distinta se da también en la página 382 del volumen 2 de la misma serie.

Problema 13: Halle el lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos inscritos en una hipérbola equilátera.

Este problema figura resuelto en la página 150 del volumen 1 de PROBLEMAS DE OPOSICIONES, de Editorial Deimos. Es también el problema 98.10 del volumen 4 de dicha colección.

(Andalucía, Junio 2014)